埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

令和３年４月入学試験問題

令和２年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2020 年 9 月 3 日 13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は①から③まで３問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題①，問題②，問題③を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 ３枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （50 点）

太陽の周りの天体の運動を考えよう。太陽（質量 M）は天体（質量 m）などに比べてずっと質量が大きいので，太陽を座標原点に固定することができる。天体は原点を含む一平面上を運動する。以下では，ある時刻の天体の位置ベクトルを $\vec{r}$，速度を $\vec{v}$ とする。万有引力定数を G として，以下の問いに答えよ。

問 1 原点周りの天体の角運動量 $\vec{\ell}$ が保存することを示せ。

問 2 角運動量の大きさ ℓ を極座標（r, θ）で表せ。

問 3 極座標（r, θ）を用いて，力学的エネルギー E を表せ。また角運動量の大きさを ℓ として，$E = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + U_{eff}(r)$ と置いたとき，有効ポテンシャル $U_{eff}(r)$ を r のみの関数として表せ。

問 4 $\ell \neq 0$ として有効ポテンシャルの概略図を描き，図を用いて，$E < 0$ の場合と $E > 0$ の場合について天体の運動の違いを論ぜよ。

問 5 離心率ベクトル $\vec{\epsilon} = \frac{\vec{v}\times\vec{\ell}}{GMm} - \frac{\vec{r}}{r}$ と位置ベクトル $\vec{r}$ の内積 $\vec{\epsilon}\cdot\vec{r}$ を角運動量の大きさ ℓ と動径座標 r を用いて表せ。必要ならばベクトルに関して成り立つ公式, $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}$ を用いよ。

問 6 離心率ベクトル $\vec{\epsilon}$ が保存する事を示せ。また，$\vec{\epsilon}$ は天体が運行する平面に平行であることを示せ。必要ならばベクトルに関して成り立つ公式,
$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ を用いよ。

問 7 $\vec{\epsilon}$ と $\vec{r}$ のなす角を θ，$\vec{\epsilon}$ の大きさを ϵ としたとき，**問 5** の結果を用い，動径座標 r を θ の関数として表せ。

$\boxed{2}$ (50 点)

下図のように、半径 a 及び b の同心円筒状導体からなる同軸ケーブルが真空中に置かれている。これらの円筒の厚みは無視でき、長さは無限とする。二つの導体には、図のように、軸方向に向きが反対で同じ大きさの電流 I が流れている。ただし、電流は各円筒の断面内を一様に流れるものとする。中心軸からの距離を図のように s とし、円柱座標系を用いて以下の問いに答えよ。真空中の誘電率 ϵ_0、真空の透磁率 μ_0 を用いてよい。座標は図中に示されているように円柱座標 (s, ϕ, z) を考え、解答には必要ならばその単位ベクトル $\hat{s},\ \hat{\phi},\ \hat{z}$ を用いてよい。

問 1 領域 $0 < s < a,\ a < s < b,\ s > b$ について、磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

問 2 単位長さあたりに蓄えられている静磁場のエネルギー W を求めよ。

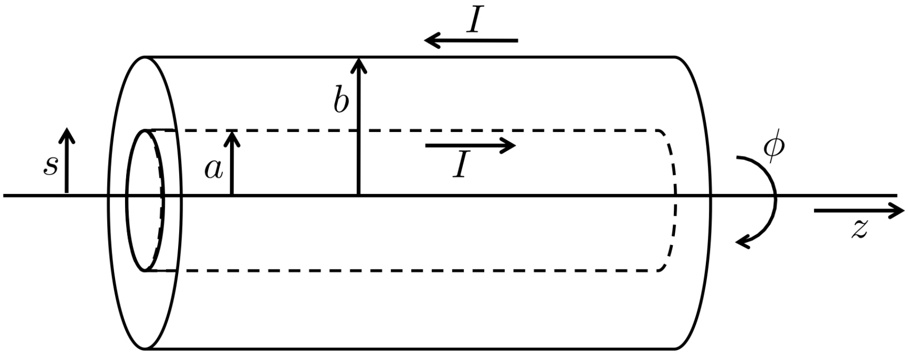
問 3 問 2 を用いて、同軸ケーブルの自己インダクタンス L を求めよ。

問 4 一般に、ある閉ループを考えた時、ループを貫く磁束 Φ は、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のループ上での周回積分で与えられる。すなわち、$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot dl$ である。この式を導け。さらにこのことを利用して、下図におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求めよ。

問 5 この系におけるパワー (単位時間あたりのエネルギー) P を以下の方法で計算せよ。ただし、各円筒導体は線電荷 λ を持つと考えてよい。

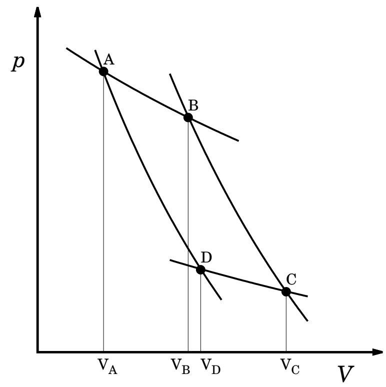
問 5-1 電場 $\boldsymbol{E}$ と 磁場 $\boldsymbol{B}$ を用いてポインティングベクトル (energy density flux) $\boldsymbol{S}$ を計算して P を求めよ。

問 5-2 円筒間の電位差 V を計算し、電流 I との積を計算せよ。



$\boxed{3}$ (50 点)

図は圧力 p と体積 V で表した可逆熱機関カルノーサイクルである。状態点 A, B, C, D の体積をそれぞれ V_A, V_B, V_C, V_D とする。また、$A \to B$ 及び、$C \to D$ は等温過程であり、それぞれ温度 T_1[K] の高熱源、温度 T_2[K] の低熱源に接触しているとする。過程 $B \to C$ 及び $D \to A$ は断熱過程である。作業物質を 1mol の単原子分子理想気体とし、以下に従いカルノーサイクルの熱効率 η_{C} を求めよ。(気体定数は R とする。)



問 1 過程 $A \to B$ で高熱源から吸収した熱量 Q_1 を温度と体積を用いて表せ。

問 2 過程 $C \to D$ で低熱源に放出した熱量 Q_2 を温度と体積を用いて表せ。

問 3 体積 V_A, V_D と温度 T_1, T_2 の関係式を導け。

問 4 体積 V_B, V_C と温度 T_1, T_2 の関係式を導け。

問 5 熱効率 η_{C} を温度で表せ。

熱機関の最大熱効率 η を求めたい。η は作業物質を理想気体とする可逆熱機関のものと等しい事を以下に従って証明せよ。また最大熱効率 η を問いの条件下で求めよ。

問 6 全ての可逆熱機関の熱効率は等しい事を示せ。

問 7 熱機関の熱効率は可逆熱機関のもの以下である事を示せ。

問 8 熱機関の高熱源と低熱源の温度が、それぞれ 127°C 及び 27°C の時、最大熱効率 η を小数第二位まで求めよ。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

令和３年４月入学試験問題

令和２年秋期入学試験問題

物　理　学　II

2020 年 9 月 3 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は$\boxed{1}$から$\boxed{2}$まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題$\boxed{1}$，問題$\boxed{2}$を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （75 点）

1 次元上を運動する質量 m の粒子の量子力学について, 以下の問いに答えよ。
必要ならば積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}k^2} \tag{1}$$

を使ってよい。ここで, a は実部が正の複素数, k は実数である。

問 1 位置表示 (x 表示) における位置演算子の固有状態を表す波動関数を求めよ。ただし固有値は $\tilde{x}$ とする。規格化条件は, 固有状態をケットベクトル $|x>$ で表したときに $< x|x' >= \delta(x - x')$ となるように取ること。

問 2 運動量演算子の固有状態を表す波動関数を求めよう。

(あ) 位置表示における運動量演算子を書け。

(い) 運動量演算子の位置表示における固有状態を表す波動関数を求めよ。ただし固有値は $\tilde{p}$ とし、固有値方程式も書くこと。また規格化の条件は**問 1** と同じになるように取ること。

(う) (い) で求めた波動関数の運動量表示での波動関数を以下の二通りの方法で求めよう。

(a) 運動量表示での固有方程式から求める。

(b) (い) で求めた波動関数をフーリエ変換する。

次に, 規格化された波動関数

$$\psi_0(x) = (2\pi\xi^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p_0 x - \frac{1}{4\xi^2}(x - x_0)^2\right] \tag{2}$$

によって表されている状態について考える。ここで, x_0, p_0,ξ は実数の定数である。

問 3 この状態で表される粒子の位置と運動量の期待値 $< x >, < p >$ を求めよ。

問 4 粒子が無限小区間 $[x, x + dx]$ に存在する確率を求めよ。

問 5 運動量表示の波動関数を求め, 粒子の運動量が無限小区間 $[p, p + dp]$ にある確率を求めよ。

問 6 **問 4** と**問 5** の結果を用いて, $\xi \to 0$ および $\xi \to \infty$ の極限で波動関数 $\psi_0(x)$ が, それぞれどのような状態を表しているかを簡潔に述べよ。

さらに波動関数の時間発展について考える。

問 7 運動量表示の波動関数 $\tilde{\psi}(p,t)$ に対する自由粒子の Schrödinger 方程式を書き，その解を求めよ。ただし時刻 $t=0$ での運動量表示の波動関数を $\tilde{\psi}_0(p)$ とする。

問 8 時刻 $t=0$ での波動関数が (2) の $\psi_0(x)$ で与えられているとき，時刻 t での波動関数 $\psi(x,t)$ を求めよ。ただし，$x_0=0, p_0=0$ とする。

$\boxed{2}$ （75 点）

２つのエネルギー準位だけを持つ独立な要素 N 個からなる系を考える。i 番目の要素の取りうるエネルギーを 0 と $\varepsilon_i(>0)$ とし、ボルツマン定数を k_B とする。必要なら公式

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{7\pi^4}{30}$$

を用いてよい。

まず、ε_i が i によらず一定値 ε の場合を考える。

問 1 温度 T における分配関数 Z、内部エネルギー U、熱容量 $C = \dfrac{\partial U}{\partial T}$ を求めよ。

問 2 低温 $(k_\mathrm{B}T \ll \varepsilon)$ の場合と高温 $(k_\mathrm{B}T \gg \varepsilon)$ の場合の熱容量 C の近似式を求めよ。

問 3 熱容量 C の温度依存性の概略を図示せよ。

つぎに、ε_i が次のように分布している場合を考える。

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} 1/E_0 & (0 < \varepsilon < E_0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ここで ε_i が ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間にある確率を $P(\varepsilon)d\varepsilon$ とする。

問 4 熱容量 C が次のように与えられることを示せ。

$$C = \frac{Nk_\mathrm{B}^2 T}{E_0}\int_0^{E_0/k_\mathrm{B}T} \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

問 5 低温 $(k_\mathrm{B}T \ll E_0)$、高温 $(k_\mathrm{B}T \gg E_0)$ それぞれの場合の熱容量 C の近似式を求め、温度依存性の概略を図示せよ。

さらに、上記とは別のエネルギー分布 $P(\varepsilon)$ を持つ系において熱容量を測定したところ、十分低温で $C(T) = AT + BT^3$ $(A, B$ は正の定数$)$ という振る舞いが得られた。

問 6 このことから決定できる範囲で $P(\varepsilon)$ を求め、その概形を図示せよ。