埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成23年度入学試験問題

物 理 学 I

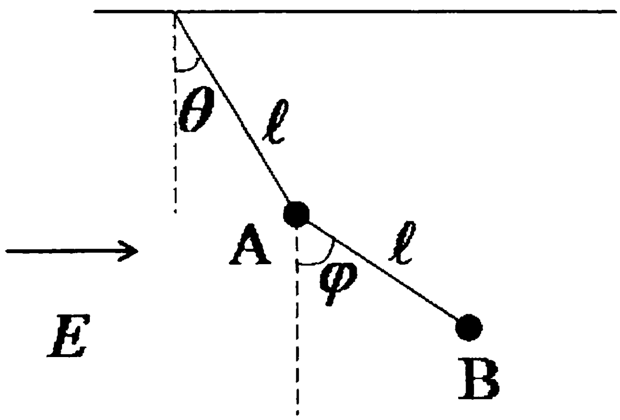
2010年8月17日 13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙3枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで３問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，どちらを解答したかを解答用紙に明記すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙３枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

1 （50 点）

図のように，一様な重力および電場中（重力加速度の大きさg，電場の大きさE）の２重平面振り子を考える。重力は鉛直下向きに，電場は水平方向左から右にかかっているとする。電荷をもたない，質量mの質点Aが天井から長さℓのひもでつながっており，さらにそれに，質量m，電荷qを持つ質点Bが長さℓのひもでつながっている。質点A，Bのひもがそれぞれ鉛直方向となす角をθ,φとし，質点A，Bは同一平面内を運動するものとする。またひもは伸縮せず，たるまないものとする。



図

（問１）Aがつながれている天井の位置を原点とし，x軸を水平右向き，y軸を鉛直上向きに取る。Aのxy座標を(x,y)，Bのxy座標を(X,Y)とするとき，この系の運動エネルギーおよびポテンシャルを表せ。原点でのポテンシャルの値をゼロとする。

（問２）この系のラグランジアンをθ,φを用いて表せ。

（問３）θ,φに共役な運動量p_θ,p_φを求めよ。

最初，AとBは静止していた。

（問４）そのときの角度θ,φを$\tan\theta$，および$\tan\varphi$の条件式で表せ。

次に，AとBが運動している状況を考えよう。以下では$q=0$とする。

（問５）角度θ,φが微小として，運動方程式をθ,φを用いて表せ。ただし，角度が微小の条件として，運動方程式でθ,φの一次までを残すこと。

（問６）$\theta=A\sin(\omega t)$，$\varphi=B\sin(\omega t)$とおき，（問５）での運動方程式に対する二つの基準振動数ωをg,ℓを用いて表せ。また，振幅の比B/Aを求めよ。

2 (50点)

以下の問に答えよ。
各設問では, 透磁率, 誘電率の値はそれぞれ真空の場合の値, μ_0 および ε_0 を用いてよい。

(問 1) 十分肉厚が薄く, 軸方向に十分長い半径 a の導体円筒がある。電流 I がこの円筒面上を一様に軸方向に流れるとき, 円筒面内外にできる磁場を求めよ。

(問 2) 半径 b $(a < b)$ の問 1 と同様な導体円筒を, 問 1 で用いた導体円筒の外側にそれぞれの中心軸が一致するように配置した。2 つの円筒面上を同じ大きさ I で反対向きの電流が軸方向に流れるとき, どのような磁場ができるか求めよ。

(問 3) 問 2 の 2 つの円筒は一種の同軸ケーブルと見なすことができる。問 2 と同様の電流が 2 つの円筒に流れるとき, 軸方向の単位長さ当たりの自己インダクタンス L を求めよ。

(問 4) 2 つの円筒をコンデンサーの両極とみた場合の単位長さ当たりの静電容量 C を求めよ。

(問 5) 次に内部の円筒を半径 a の円柱に交換し, 外側の半径 b の円筒はそのままとする。そして, 内側の円柱に電流 I が一様に軸方向に流れ, 外側の円筒にはそれと反対向きの電流 I が流れるとき, 単位長さ当たりの電磁エネルギーを求め, 自己インダクタンス L を導出せよ。

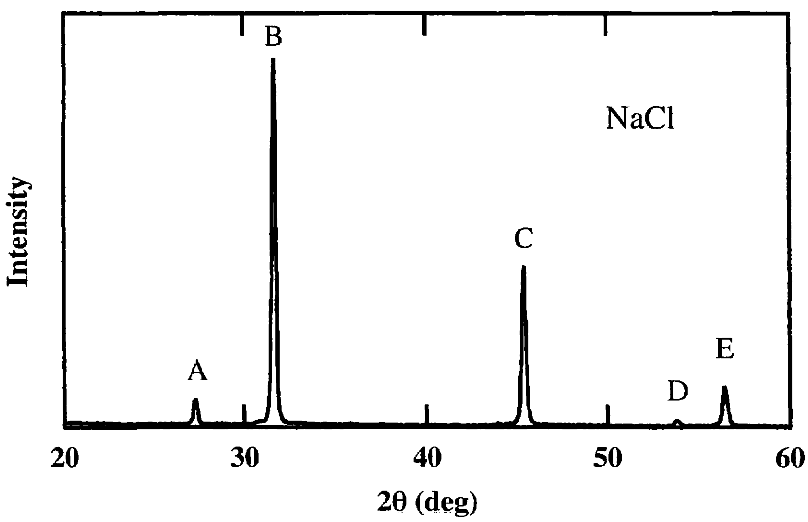
3 (50点)

AまたはBいずれか一題を選択し解答せよ。

A

(問1) 粉末X線回折実験装置（ディフラクトメーター）を構成する, X線源, 検出器, 試料, スリットなどの主要部の位置関係を図示し, 動作を説明せよ。また, 試料を粉末にする理由を述べよ。

(問2) 図は銅の K_α 線を使用した立方晶NaClの粉末X線回折パターンを示しており, 一番強度の大きい回折ピークBのミラー指数は(2 0 0)である。また, 各ピークの回折角 2θ, ブラッグの回折条件 $2d\sin\theta = \lambda$ より求めた面間隔 d ならびに $1/d^2$ の値を表に示す。立方格子の格子定数 a と面間隔 d, ミラー指数 $(h\,k\,l)$ の間には $1/d^2 = (h^2+k^2+l^2)/a^2$ の関係式が成り立つ。まず, 立方格子の格子定数 a を表に示されている回折ピークBの情報を用いて有効数字3桁で求めよ。次に, A, C, D, Eの各回折ピークを指数付けせよ。



図

記号	2θ(deg)	d(Å)	$1/d^2$(Å^{-2})
A	27.37	3.26	0.0941
B	31.70	2.82	0.126
C	45.45	1.99	0.253
D	53.87	1.70	0.346
E	56.47	1.63	0.376

表

(問 3) NaCl 結晶の構造因子 F_{hkl} を計算し, 問 2 で行った回折ピークの指数付けの結果と比較して消滅則を説明せよ。

$$F_{hkl} = \sum_{n=1}^{N} f_n \exp\{2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)\}$$

この結晶は単位格子当たり 4 個の Na 原子と Cl 原子を持っており, 格子定数 a を 1 とした時の原子座標は以下に示す通りである。

Na: $(0, 0, 0)$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

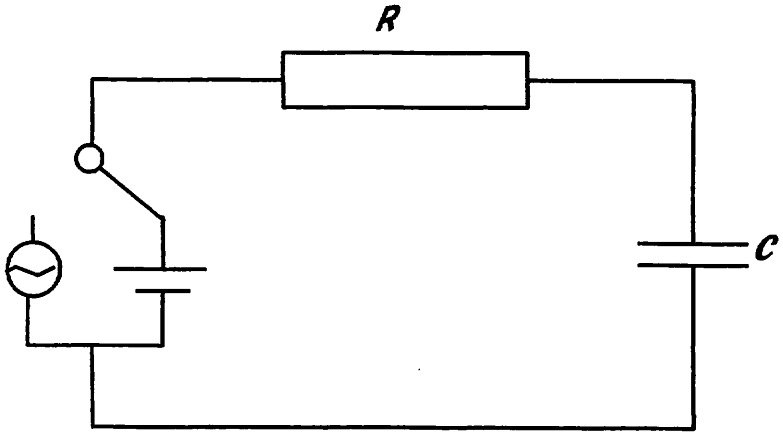
Cl: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(0, 0, \frac{1}{2})$ $(0, \frac{1}{2}, 0)$ $(\frac{1}{2}, 0, 0)$

(問 4) A, D の回折ピークが他の回折ピークに比べ, 強度が相対的に小さいことを説明せよ。

(問 5) KCl 結晶では問 4 で問題にした A, D に相当する回折ピークは観測されない。その理由を説明せよ。

B

図で示したような， 直流もしくは交流電源に抵抗 ***R*** [Ω]の抵抗器と電気容量 ***C*** [F]のコンデンサを直列に接続した回路について考える。 電源電圧が ***E*** [V]のとき， 抵抗器とコンデンサの両端の電位差をそれぞれ時間の関数 $x(t)$, $y(t)$ として，以下の問に答えよ。



図

(問 **1**) 最初に， $t = 0$ において直流電源のスイッチをいれた。$x(t)$を片対数グラフで示せ。

(問 **2**) $y(t)$についての微分方程式を示せ。

次に，$y(t)$について数値計算で求めることを考える。 一般に数値計算においては，離散的にあつかうが，ここでは，

$$y_n = y_{n-1} + h\frac{dy_{n-1}}{dt} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

を順次求めて行くことを考える(**Euler** 法)。 ***R*** = **1** kΩ, ***C*** = **1** mF のとき，**0.25** ***ms*** 毎に計算するために **C** 言語で書かれた次頁のプログラムを使う。以下の問に答えよ。

電圧の時間変化を求めるCプログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double calc_next_step(double a, double b) {
     return (a +  b * ( 1.0 - a ));
}

main() {
     double t = 0.0, y = 0.0, h =0.25;
     int        i, N=20;
     for ( i = 0; i < N; i++) {
          printf("%8.4f%14.5E\n", t, y); ←(あ)
          y = calc_next_step(  (い)  ,  (う)  );
          t += h;
     }
}
```

(問3) 関数 main()の中の（あ）で示した行の関数によって出力される数値を　t = 0.0, 0.25,0.5　のときについて，出力される書式に注意しながら示せ。

(問4) 関数 main()中の（い），（う）に入るべき数式をプログラム中の変数を用いて答えよ。

最後に，スイッチを切り替え，電源を　$E = Ae^{-i\omega t}$　の交流を発生する交流電源に交換した。このときの応答について以下の問に答えよ。

(問5) ωを変化させたとき、コンデンサの両端に発生する電圧の「振幅」と「位相」はどのように　変化するか。簡潔に説明せよ。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成23年度入学試験問題

物 理 学 II

2010年8月17日 15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙3枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は1から2まで2問ある。すべて解答すること。
5. 問題1・2は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。必要であれば，その旨を明記して裏面も使用してよい。もし解答が1枚に収まらない場合は，解答が別紙に続く旨を明記した上で，2枚目を使用してよい。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙3枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ (75 点)

a を正の定数とする 1 次元のポテンシャル

$$V = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| < a \\ \infty & \text{for } |x| > a \end{cases}$$

中の質量 m の量子力学的粒子を考える。

(問 1) 基底状態の厳密な波動関数 $\phi(x)$ を求めよ。

(問 2) 基底状態の厳密な固有エネルギー E_1 を求めよ。

次に試行関数 $w(x) = a^\eta - |x|^\eta$ を考え，$\eta(>1)$ を変分パラメーターとする。

(問 3) $\langle w|w\rangle$ を計算せよ。

(問 4) 系のハミトニアン H に対し $\langle w|H|w\rangle$ を計算せよ。

(問 5) 基底状態の固有エネルギー E' を変分法に基づき計算せよ。

(問 6) この E' は厳密な値 E_1 と何％違うか比較せよ。ただし π^2=9.869，$\sqrt{6}$=2.449 とする。

2 (75点)

一辺が L，体積が $V = L^3$ の立方体の箱に閉じ込められた，外場がなく相互作用もない，質量 m の，N 個の同種のボース粒子 (スピンの大きさ 0) と N 個の同種のフェルミ粒子 (スピンの大きさ 1/2) の系について，以下の問に答えよ。絶対温度を T，ボルツマン定数を k_B，化学ポテンシャルを μ，プランク定数を h，$\hbar = h/2\pi$ とせよ。

(問 1) フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$，ボース分布関数 $n(\varepsilon)$ をエネルギー ε の関数として式で表わせ。また，低温と高温で，それぞれ特徴がわかるように，ε の関数として図に描け。

(問 2) フェルミ粒子系において，フェルミ波数 k_F，フェルミ・エネルギー E_F の意味を述べ，粒子密度 $n = N/V$ を用いて式で表わせ。

(問 3) フェルミ粒子の系における「フェルミ縮退」とは何か説明せよ。「フェルミ縮退」を起こす条件を式で示せ。必要なら，$E_F = k_B T_F$ で定義されるフェルミ温度 T_F を用いよ。

(問 4) ボース粒子の系が，ボース－アインシュタイン凝縮を起こす転移温度 T_c を求めよ。

(問 5) フェルミ縮退を起こす条件と，大多数の粒子がボース－アインシュタイン凝縮を起こす条件が，係数をのぞいて，「熱波長」$\lambda \equiv (h^2/2\pi m k_B T)^{1/2}$ と密度 n を用いて，同じ形に書けることを示せ。

(問 6) 光子はボース粒子であるが，ボース－アインシュタイン凝縮を起こさない。その理由を，化学ポテンシャルの値と関係付けて述べよ。

ただし，必要なら，次の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2),\ \zeta(3/2) \simeq 2.612$$