埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 23 年度（第２次募集）入学試験問題

物 理 学

2011 年 2 月 15 日　13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙４枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から４まで４問ある。それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。裏面まで解答が及ぶ場合には，「裏に続く」と下に書くこと。
5. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
6. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙４枚の全てを提出すること。
7. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ （１００点）

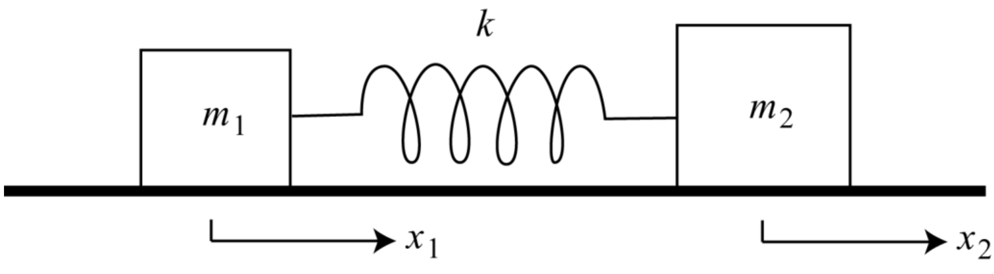
下図のように，直線上に質量m_1，m_2の物体１，２が，バネ定数kのバネによりつながれて，摩擦なしに直線運動する。２つの物体は，はじめ静止しており，そのつりあいの位置からの変位を，右方向を正に，物体１，２それぞれについてx_1，x_2 とする。

（問1）　系のラグランジュアンを示し，物体１，２それぞれの運動方程式を導け。

（問2）　重心座標$X = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ と相対座標$x = x_1 - x_2$を用いて運動方程式を書き直し，重心は加速運動せず，振動は二つの物体の相対的な運動に限られることを示せ。

（問3）　重心に対して物体が振動するときの角振動数を求めよ。

（問4）　外力（たとえば手）をもちい，いったん $x_1 = 0, x_2 = x_{20}$に固定したあとで，$t = 0$　で，この外力をとりのぞいた。$t > 0$ における$x_1(t)$を求めよ。



図

$\boxed{2}$ （１００点）

図１に示すような半径 a の円電流 I が, 円の中心Ｏから距離 z の中心軸上の点 $P(0,0,z)$ につくる磁束密度の大きさ B を求める。各設問では, 透磁率は真空中の値 μ_0 を用いてよい。

(問 1) 微小電流要素 $Id\boldsymbol{s}$ が点Ｐにつくる磁束密度の大きさ dB を求めよ。

ただし, ビオ・サバールの法則：$d\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ ($d\boldsymbol{s}$：微小線要素ベクトル, $\boldsymbol{r}$：微小線要素から点Ｐに向かうベクトル) が成り立つとする。

(問 2) 円電流全体が点Ｐにつくる磁束密度の大きさ B を求めよ。

(問 3) このとき, z 軸上の十分遠方の点につくる磁束密度の大きさが

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2|z|^3}$$

で表せることを示せ。

図２のように, 半径 a のまっすぐなソレノイドを考える。中心軸が z 軸の $z<0$ の部分に重なるように置いてある。ソレノイドの一方の端は xy 平面上にあり, その円の中心は座標軸の原点Ｏにある。ソレノイドは十分に長く, もう一方の端は $z=-\infty$ にあると考えてよい。ソレノイドの z 方向の単位長さ当たりの巻数は n であり, 電流 I が図に示した向きに流れている。

必要ならば, 不定積分の公式

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\alpha^2\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

を用いてよい。

(問 4) z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\,0,\,z)$ $(z>0)$ につくる z 軸方向の磁束密度 B_z を求めよ。

図３のように, 半径 b の円状コイルを, 中心が点 $\mathrm{P}(0,\,0,\,z)$ にあり, xy 平面に平行になるように置く。コイルには, 電流 I_1 がソレノイドの電流と同じ向きに流れている。

(問 5) ソレノイドが円状コイル上につくる磁束密度は軸対称であるが, 一様ではない。z 軸と垂直な磁束密度の成分を B_b としたとき, コイルが受ける力の大きさと向きを求めよ。

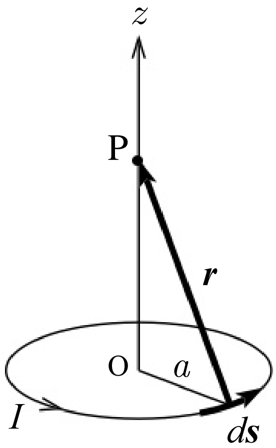


図 1

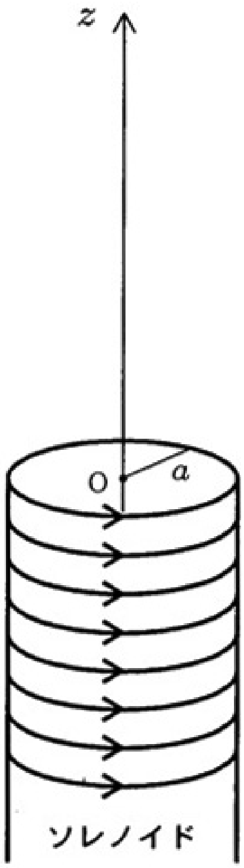


図 2

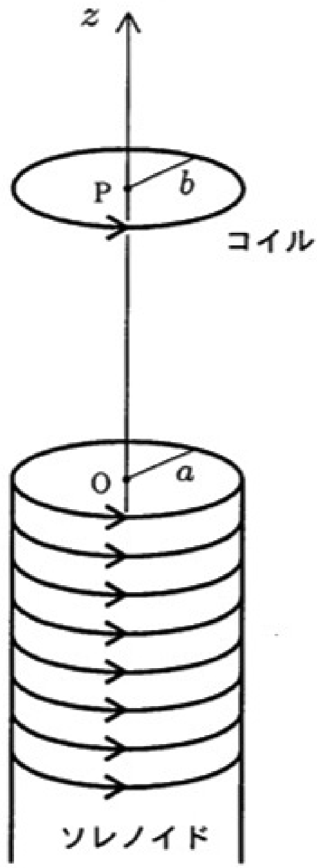


図 3

$\boxed{3}$ （１００点）

ハミルトニアン演算子 $\hat{H}_0 = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ で記述される，質量 m，角振動数 ω の一次元調和振動子の量子力学を考える。演算子 $\hat{a}$ を $\hat{a} = \alpha\hat{x} + i\beta\hat{p}$ (α, β は正の実数，i は虚数単位) とおく。また，$\hat{a}^\dagger$ を $\hat{a}$ のエルミート共役な演算子とする。座標 $\hat{x}$ および運動量 $\hat{p}$ は交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす。$\hbar = h/(2\pi)$ で h はプランク定数である。

（問 1）$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を計算し，$\alpha, \beta, \hat{x}, \hat{p}$ を用いて表せ。

（問 2）$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ の交換子 $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ を計算し，$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ となる条件を α, β で表せ。

（問 3）$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ となるように，α, β を m, ω を用いて表せ。

（問 4）$|0\rangle$ を，$\hat{a}|0\rangle = 0$ となる状態とする。$|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle$ に対して，$\hat{H}_0|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$ が成立することを示せ。

（問 5）摂動ハミルトニアン $\hat{H}_1 = \lambda\hat{x}^2$ (λ は定数) に対して，状態 $|n\rangle$ に対する一次の摂動によるエネルギーの変化 $\Delta E_n^{(1)}$ を与えよ。

（問 6）摂動ハミルトニアン $\hat{H}_1 = \mu\hat{x}$ (μ は定数) に対して，状態 $|n\rangle$ に対する二次の摂動によるエネルギーの変化 $\Delta E_n^{(2)}$ を与えよ。

$\boxed{4}$　（１００点）

１次元イジング模型

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\ \sigma_i\sigma_{i+1} - \mu H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

について考える。$\sigma_i = \pm 1\ (i = 1, \cdots, N)$ はイジング・スピン，H は磁場，J は交換相互作用，μ は磁気モーメントの大きさである。周期的境界条件を課し，$\sigma_{N+1} = \sigma_1$ とする。N は偶数とする。正準集合の分配関数 $Z_N = \mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}})$ ($\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$，$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数，T は絶対温度) を求めるため，ハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\ \sigma_i\sigma_{i+1} - (\mu H/2)\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

と書き直し，分配関数を,

$$Z_N = \sum_{\sigma_i=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}\exp\left[\beta J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{\beta\mu H}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1})\right]$$

とする。ここで,

$$A(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \equiv \exp\left[\beta J\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{\beta\mu H}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})\right]$$

と置くと，分配関数は,

$$Z_N = \sum_{\sigma_i=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}A(\sigma_1, \sigma_2)A(\sigma_2, \sigma_3)\cdots A(\sigma_N, \sigma_1)$$

と書ける。$A(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を，$\sigma_i = \pm 1, \sigma_{i+1} = \pm 1$ を足とする 2×2 の行列

$$A(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と見ると，分配関数は，行列 A の N 個の積の対角和

$$Z_N = \mathrm{Tr}(A^N)$$

と書ける。以下の問いに答えよ。

(問 1) $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ を求め，$A(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を 2×2 の行列の形に書け。

(問 2) 行列 A を対角化し，固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。ただし，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ とする。

(問 3) $N \to \infty$ の極限で，分配関数 Z_N を求めよ。

(問 4) $T = 0$ では，スピンはどのように配列すると予想されるか？$J > 0$ の場合と $J < 0$ の場合に分けて答えよ。

(問 5) 帯磁率 $\chi(T) = \lim_{H\to 0}(\partial M/\partial H)$ を温度の関数として求めよ。$M = N\mu\langle\sigma\rangle$ である。なお，$Z_N = (Z_1)^N$ と書いて，Z_1 を H について 2 次までテーラー展開するとよい。また，$J > 0$ の場合と $J < 0$ の場合に分けて，$\chi(T)$ の概形を図示せよ。

(問 6) この系では，$T = 0$ 以外では，長距離秩序は生じない。その理由を $J > 0$ の場合に，ヘルムホルツの自由エネルギーについて考察することにより説明せよ。