埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成25年度（第2次募集）入学試験問題

物 理 学

2013年2月19日　13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙４枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から４まで４問ある。それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。裏面まで解答が及ぶ場合には，「裏に続く」と下に書くこと。
5. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
6. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙４枚の全てを提出すること。
7. 問題冊子は持ち帰ること。

1 (75 点)

以下の３問に答えよ。

(問 1) ばね定数k，自然長Lのばねの下端に質量mの大きさの無視できるおもりをつり下げる。ばねの上端を角振動数ω，振幅hで強制的に上下に動かした。ばねとおもりの振動方向をx軸とし，時刻$t=0$において，ばねの上端の位置を原点$x=0$とする。時刻$t=0$で，ばねとおもりは静止しており，時刻tにおける上端の位置を$x_0(t)$，おもりの位置を$x(t)$とする。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。

(a) 上端の位置$x_0(t)$をh，ω，tをもちいて表せ。

(b) おもりの運動方程式を求めよ。

(c) 運動方程式を解いて，おもりの運動について説明せよ。

(問 2) 2 次元平面上の点(x,y)にある質量mの物体が，図に示すようにy軸を鉛直下向き方向にとり，点 A$(0,0)$からある経路（点線で示すような）に沿って，初速 0 で運動をはじめ，鉛直下向きの重力のみの作用のもとで点 B(x_1,y_1)に到着する。経路の微小長さdsを通過する時間を$dt=\dfrac{ds}{v}$とするとき（vは経路に沿った物体の速さ），所要時間は$T=\int_A^B \dfrac{ds}{v}$となる。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。

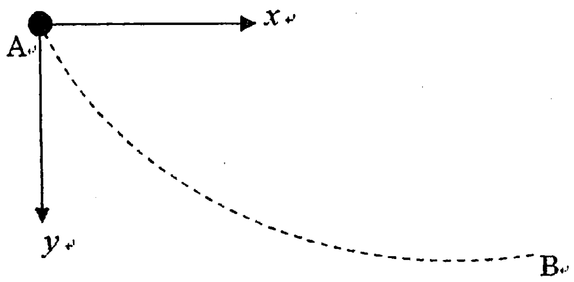
(a) dsとvをx,yを用いた式で置き換えて，所要時間を表す式，

$$T=\int_0^{y_1} P\left(y,\frac{dx}{dy}\right)dy$$

における，関数$P\left(y,\dfrac{dx}{dy}\right)$を求めよ。

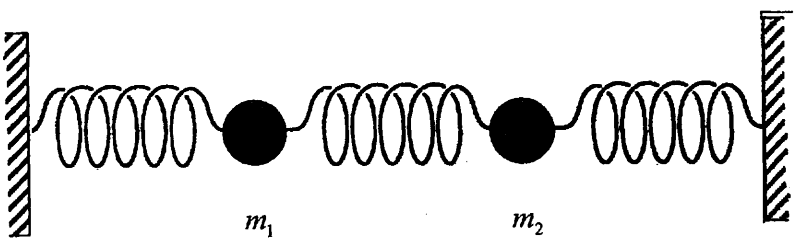
(b) Tを最小にするための条件を与える Euler の微分方程式を求めよ。

(c) AB 間の経路の中で，点 B に到着するまでの所要時間が最小になる経路を求めよ。
(d) 直線 AB が最短の距離経路であるにかかわらず，所要時間が最小にならない理由をわかりやすく説明せよ。



(問 3) 下図に示したように，重力が働かない真空中で，壁に固定された 2 振子（質量 m_1, m_2）による連成ばねを考える。ただし 3 つのばねについて，ばね定数はすべて同じ k とし，ばねは壁がある方向に 1 次元的にしか動かないものとする。

(a) 座標軸を適当に取り，この系のラグランジアンを求めよ。
(b) Euler-Lagrange 方程式をつくり，解を求めよ。



2 (75 点)

無限に広がったある平面上に電荷が一様に分布している。電荷面密度は σ である。この平面を xy 面として，このまわりの電場を，以下の３つの方法で求めよ。真空の誘電率は ε_0 とせよ。

(問 1) ① この系が平面に垂直にとった軸(z軸)のまわりの回転に対して対称であることから，この平面上で半径が r と $r+dr$ の円環を考える。この円環上に分布した電荷が，円環の中心から垂直な直線上の点につくる電場を求めよ。

② ①の結果を積分することで，平面全体に分布する電荷による電場を求めよ。平面の上下の電場の大きさと方向について示すこと。

(問 2) ガウスの法則を使って，この電場を求めよ。

(問 3) ① 電位 ϕ と電荷密度 ρ が満足する関係式（三次元のポアソン方程式）を導け。

② 上で示した関係式を，この平面上の一様電荷の問題に適用して電場を求めよ。

次に真空中で，それぞれ $\pm\sigma$ の面密度の電荷を持った２枚の平行板(面積 S)を距離 d だけ離して絶縁し，平行板コンデンサーとする。ここで板の端における影響は無視する。

(問 4) ① 極板内外の電場(E)と電束密度(D)を求めよ。それぞれの大きさと方向を示すこと。

② このコンデンサーに同じ面積 S の誘電体の板（厚さ t，誘電率 ε）を極板に平行に，板の端を一致させて差し入れた。このときの極板内外の電場(E)と電束密度(D)を求めよ。それぞれの大きさと方向を示すこと。

$\boxed{3}$ (75 点)

質量mの量子力学的粒子が

$$V(x)=\begin{cases}\infty & (|x|\geq \frac{a}{2}) \\ 0 & (|x|<\frac{a}{2})\end{cases}$$

で与えられる一次元ポテンシャル$V(x)$の中を定常運動する場合を考えよう（aは正の定数)。以下の解答では，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$（hはプランク定数）を用いて良い。 また，解答にあたって必要な記号は定義をして適宜用いよ。

(問1) 波動関数を$\phi(x)$で表すとき，この系のシュレディンガー方程式を記せ。

(問2) 固有エネルギーE_n $(n=1,2,\ldots)$と規格化された波動関数$\phi_n(x)$を具体的に求めよ。

(問3) 摂動ポテンシャル$U(x)=A\cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$（$A$は定数)が加わった時，1 次の摂動による固有エネルギーの変化$E_n^{(1)}$を求めよ。

今状態が　$\phi(x)=B\left[\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-x^2\right]$　（Bは正の定数)で与えられたとする。

(問4) 規格化定数Bをaで表せ。また，(問２)で与えられる状態$\phi_n(x)$にいる確率P_nを求めよ。

$\boxed{4}$ （75点）

一辺の長さ L の3次元の箱（体積 $L^3 \equiv V$）に閉じ込められている $2N$ 個の自由電子に対して，絶対零度での振る舞いを考える。$\hbar$（$\equiv \frac{h}{2\pi}$，h はプランク定数），電子の質量 m，ボーア磁子 $\mu_{\rm B}$ として以下の問に解答せよ。

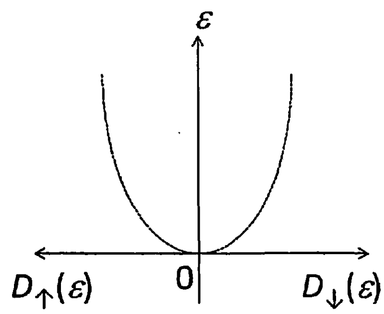
（問1）フェルミ波数 $k_{\rm F}$，ならびにフェルミエネルギー $E_{\rm F}$ を求めよ。

（問2）電子のエネルギーを ε としたとき，各スピンあたりの状態数 $\Omega_{\uparrow}(\varepsilon)$ $(= \Omega_{\downarrow}(\varepsilon))$ を求めよ。次にその微分 ${\rm d}\Omega_{\uparrow}/{\rm d}\varepsilon$ $(= {\rm d}\Omega_{\downarrow}/{\rm d}\varepsilon)$ を計算することにより，状態密度が以下で与えられることを示せ。ただし，$\uparrow$，$\downarrow$ はそれぞれ，上向きスピン，下向きスピンを表すものとする。

$$D_{\uparrow}(\varepsilon) = D_{\downarrow}(\varepsilon) = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} m^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

次に，磁場中での振る舞いを考える。一様な磁場 H 中に置かれている電子は磁場の方向に平行に $\mu_{\rm B}H$（反平行に $-\mu_{\rm B}H$）のエネルギーをもつ。

（問3）右図はゼロ磁場下での電子の状態密度について，縦軸エネルギー ε，横軸左側（右側）を $\uparrow$ スピン（$\downarrow$ スピン）の状態密度として描いたものであるが，磁場下で状態密度はどのように変更されるか解答用紙に図示せよ。なお，磁場下での電子のとりうる最大エネルギーを ε_0 とせよ。



（問4）$\uparrow$ スピン，$\downarrow$ スピンをもつ電子のとりうる最大の波数 $k_{\rm F\uparrow}$，$k_{\rm F\downarrow}$ を求めよ。

（問5）$\uparrow$ スピン，$\downarrow$ スピンをもつ電子数 $N_{\uparrow}$，$N_{\downarrow}$ を求め，次に全磁気モーメントを求めよ。

（問6）$\varepsilon_0 \gg \mu_{\rm B}H$ として磁化を H の一次まで展開し，帯磁率を求めよ。