埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　物理機能系専攻　物理学コース

平成 27 年 4 月入学試験問題

平成 26 年秋期入学試験問題

物　理　学　I

2014 年 9 月 11 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 4 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで 3 問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，どちらを解答したかを解答用紙に明記すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 4 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （50 点）

図のように, 長さ l の質量の無視できる軽い棒の先に質量 m のおもりをつけた球面振り子を考える。振り子の支点は点 O に固定されており, 棒はどの向きにも回転する。点 O を原点として, 鉛直上向きを z 軸の正の向きとする座標軸を選ぶ。おもりの位置座標 (x, y, z) は, 3 次元極座標の角度座標 θ, ϕ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi)$ を使って,

$$x = l\sin\theta\cos\phi, \quad y = l\sin\theta\sin\phi, \quad z = l\cos\theta$$

と表せる。重力加速度を g として, 以下の問に答えよ。

(問 1) この系のラグランジアン L を, 角度座標 θ, ϕ を使って表せ。ただし, おもりの速さの 2 乗 v^2 は, $v^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$ と表せることを使ってよい。ここで, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ は, θ, ϕ の時間微分である。

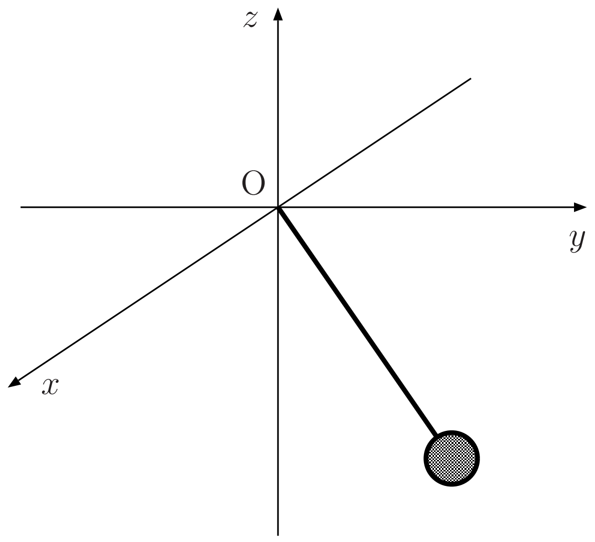
(問 2) ラグランジュの運動方程式を求めよ。

(問 3) 角運動量の z 成分 $J = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$ が保存することを示せ。

(問 4) J を与えられた定数として, θ と ϕ のうち, θ だけを含む運動方程式を求めよ。

(問 5) $\theta = \theta_0$ (定数) $(\theta_0 \neq 0, \pi)$ が解となるとき, $\left(\dfrac{J}{ml^2}\right)^2$ を g, l, θ_0 を使って表せ。

(問 6) 問 5 の解のまわりの微小なゆらぎは振動する。$\theta(t) = \theta_0 + \alpha(t)$ とおき, 微小なゆらぎ $\alpha(t)$ の振動の周期 T を, g, l, θ_0 を使って表せ。



2 （50 点）

同軸で高さ L の二つの円筒状導体 A と B がある。内側の導体 A の外径を a，外側の導体 B の内径を b とする。それらの間は誘電率 ε の液体で，高さ x まで満たされているとする。液体のない部分の誘電率は ε_0 とし，また a や b は，L や x に比べて非常に小さく境界の影響は無視できるとする。以下の問に答えよ。

(問 1) 導体 A の表面上の液体に浸された部分の電荷を Q として，二つの円筒の間の電場を中心軸からの距離 r $(a < r < b)$ の関数で表せ。

(問 2) 液体で満たされた部分の静電容量 C_1 と，満たされていない部分の静電容量 C_2 を求めよ。

(問 3) 二つの導体の電位差を V に保たれるようにした上で，液体に浸される部分の高さを次第に増やしていく。液体の高さが Δx だけ増えたときに，導体 A，B 間の静電エネルギーはどれだけ変化するか。

次に，同軸ケーブル内を伝播する電磁波を考える。同軸ケーブルを構成する芯線とシールドの二つの導体の間は，誘電率 ε，透磁率 μ の絶縁体で満たされている。以下の問に答えよ。ただし解答では，軸方向を z，軸からの距離を r，軸周りの角度を φ とする円柱座標を用い，必要に応じて，以下の円柱座標でのベクトル演算の公式を用いてよい。

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

(問 4) 電場，磁場の時間依存性を $e^{i\omega t}$ として，Maxwell 方程式から，電場，磁場の各成分のうち E_r と B_φ がともに z 方向に伝わる横波であることを示せ。ただし，二つの導体は完全導体であり，電場，磁場の各成分のうち，$E_\varphi = E_z = 0$，$B_r = B_z = 0$ であることを用いてよい。

3 (50 点)

A または B のいずれか一題を選択し解答せよ。

A

固体試料の電気抵抗測定に関して以下の問に答えよ。

(問 1) 試料の電気抵抗を 4 端子法により測定する。実験器具として, 電源 1 台, 電圧計 2 台, 標準抵抗 1 つ, 試料 1 つ及び導線を用いる。図 1 で示す記号を使って配線の様子を作図し, 電気抵抗を測定する手順を説明せよ。ただし, 導線は何本使用しても構わないが, 試料と他の実験器具は示されたものだけを使用する。試料と導線の接続部には ● 印をつけること。

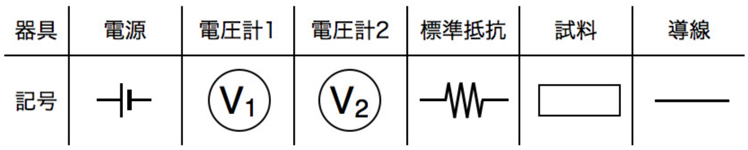


図 1

(問 2) 上記で示した 4 端子法が 2 端子法に比べて, どの点が優れているか説明せよ。また, 測定の精度を上げるためには, 使用する電圧計の内部抵抗に関して, どのような条件が望まれるか, またその理由を説明せよ。

(問 3) 金属試料を用いて 4 端子法で測定を行ったところ, 電流 I と電圧 V の関係として図 2 が得られた。電流 $I = 0$ [A] においても有限の電圧 V_0[V] が観測された。この現象について考えられる原因をあげて説明せよ。ただし, 電圧計, 電流計は調整が十分に成されており, 正常に動作していると考えてよい。

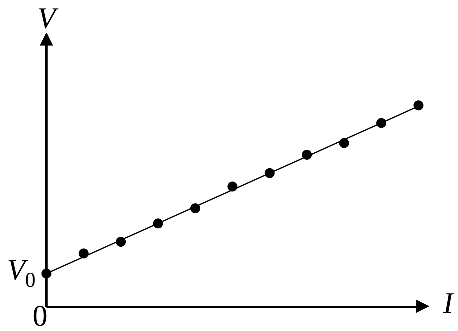


図 2

(問4) 問3で考えた原因による, 測定値への影響を除去するためにはどのような工夫をしたらよいか, 理由とともに説明せよ。

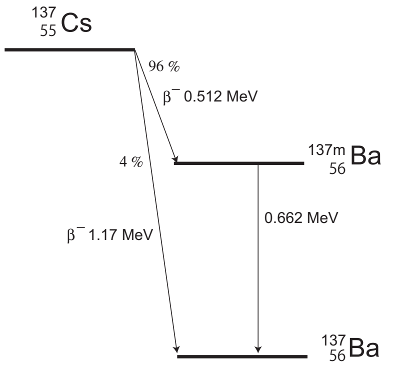
(問5) ある半導体試料の電気抵抗の温度依存性を測定したところ, 表1に示すような実験結果が得られた。このような電気抵抗の温度依存性を示す起源について, 電子状態の模式図を示すなどして説明せよ。また, 配布した片対数方眼紙（受験番号を明記のこと）に実験結果をプロットし, 活性化エネルギーを温度 (K) を単位にして求めよ。必要であれば, $\log_e 10 = 2.30$ を用いてよい。

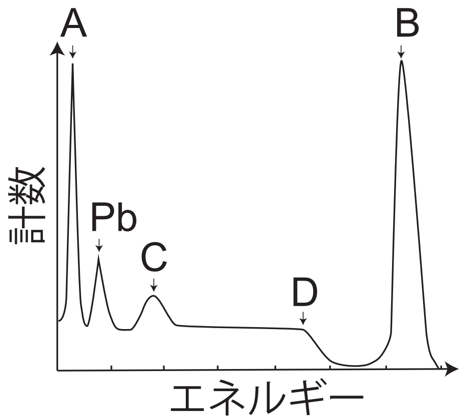
表1

温度 T (K)	$1/T$ ($\times 10^{-3} K^{-1}$)	電気抵抗 R (Ω)
273	3.66	13680
284	3.52	8790
291	3.44	6401
298	3.36	4639
305	3.28	3539
311	3.22	2755
318	3.14	2148
329	3.04	1464
340	2.94	1015
345	2.90	877

B

${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ は，下図左のような経路で ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}$ に崩壊する。この過程をある NaI(Tl) シンチレータで計測したところ，下図右のようなエネルギースペクトルを得た。このエネルギースペクトルは，横軸，縦軸ともに線型で，横軸がシンチレータで受けた放射線のエネルギー，縦軸はそれぞれのエネルギーをもつ放射線の計数である。図に Pb と表示してある左から二つ目のピークは，遮蔽にもちいた ${}_{82}\mathrm{Pb}$ の特性 X 線 (約 74 keV) であることがわかっている。





(問 1) 下の（あ）〜（え）の４つの文章は，スペクトルに示した A~D の４つの特徴的な構造について説明したものである。それぞれの 名称 と，A~D のどれについての説明か答えよ。

（あ）この構造は，試料から放出されたガンマ線が，シンチレータ内で入射した方向と 180 度の角度にコンプトン散乱されたときに見られる。

（い）このエネルギーに対応する波長 λ は，原子番号を Z，光速を c，リュードベリ定数を R としたとき，

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4}cR(Z-1)^2$$

と近似されるモーズリーの法則に従うことが知られている。

（う）この構造は，試料から放出されたガンマ線が，シンチレータ外の物質によって 180 度の角度でコンプトン散乱されてから，シンチレータに入射したときに見られる。

（え）この構造は，原子核の崩壊にともなって放出されたガンマ線のすべてのエネルギーが，シンチレータ内部に付与されたときに見られる。

(問 2) スペクトル構造 A~D それぞれの エネルギー を求めよ。解答においては，導出の過程も明記すること。必要であれば，電子の静止エネルギーを 511 keV，陽子の静止エネルギーを 938 MeV としてよい。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 27 年 4 月入学試験問題

平成 26 年秋期入学試験問題

物 理 学 II

2014 年 9 月 11 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から２まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題１・２は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （75 点）

電子と陽電子（電子の反粒子）からなるポジトロニウムを考える。電子の質量を m_e, 電荷を $-e$ とする。それぞれの位置ベクトルを $\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p$ とし, それに共役な運動量を $\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p$ とする。微細構造定数は α とし, エネルギーを eV で表す自然単位系を用いるとする。

(問 1) 陽電子の電荷と質量を問題に与えられた記号を使って答えよ。

(問 2) (a) 電気的な力のみ働くとして, この系のハミルトニアンを与えられた記号のみを用いて書け。

(b) (a) のハミルトニアンを重心運動 $(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ と相対運動 $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を使って書き直せ。導出はしなくてよいが, $\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$ の定義は与えること。

(c) この結果を使うと, 系の定常状態の波動関数は $\phi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r})$ と変数分離できる。これを示せ。

(d) 相対運動のシュレディンガー方程式を極座標表示で書け。ただし極座標でのラプラシアンは

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

である。

(e) 角運動量の大きさに対応する量子数を l とする。波動関数 $\psi(r,\theta,\varphi)$ を動径方向と角度方向に $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ と変数分離し, それぞれが満たす方程式を書け。

(f) 動径方向の波動関数は, 原点付近ではどのように振る舞うか。また, 無限遠ではどうか。

(g) 前問において, 原点付近での振る舞いを表す関数を $f_0(r)$, 無限遠での振る舞いを表す関数を $f_\infty(r)$ とし, $R(r) = f_0(r)f_\infty(r)\chi(r)$ と書く。これに対し, χ が従う方程式を求めよ。

(h) $l = 0$ の最低エネルギー状態が基底状態を与える。$l = 0$ の場合, エネルギーがある値を取るとき $\chi =$ 定数が (g) で求めた方程式の解になることを確かめよ。また, このことを用いて, 基底状態を与える波動関数とそのときのエネルギーを求めよ。ただし規格化はしなくてよい。

(i) 水素原子の基底状態の束縛エネルギーは 13.6 eV である。これを用いてポジトロニウムの束縛エネルギーを求めよ。

(問 3)　(a) 陽電子も電子もスピンを持つ。このことから問 2 の基底状態は何重に縮退していると分かるか, 答えよ。

(b) 陽電子のスピン $\mathbf{S}_p$, 電子のスピン $\mathbf{S}_e$, の間に

$$\mathcal{H}_{\rm int} = \beta\ \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \quad (\beta \text{ は定数})$$

という相互作用があるとする。これにより (a) の縮退はどのように解けるか説明せよ。

$\boxed{2}$ （75 点）

強磁性イジングモデル

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle i,j\rangle} S_i S_j - \mu H \sum_{i=1}^{N} S_i \quad (J>0,\ S_i = \pm 1/2)$$

について平均場近似で考える。ここで，S_i は i 番目の格子点上のスピンであり，各スピンの持つ磁気モーメントは μS_i で与えられるとする。また，$\sum_{\langle i,j\rangle}$ は最近接格子点の対についての和であり，スピン間相互作用を J，磁場を H，格子点の総数を N，最近接格子点の数を z，ボルツマン定数を k_{B}，絶対温度を T とし，物理量 A の統計力学的な期待値を $\langle A\rangle$ と表す。必要なら $|x| \ll 1$ のときに成り立つ近似式

$$\tanh x \simeq x - \frac{x^3}{3}$$

を用いよ。なお，問 2(b) 以降の問題では，結果は J を用いず，問 2(a) で求めた T_{c} を使って表すこと。

(問 1) まず，平均場近似での自己無撞着方程式を導こう。

(a) S_i に対する平均場近似のハミルトニアン $\mathcal{H}_i^{\mathrm{MF}}$ が，

$$\mathcal{H}_i^{\mathrm{MF}} = -(Jzm + \mu H)S_i$$

で与えられることを説明せよ。ただし，$m = \langle S_i\rangle$ である。

(b) $\mathcal{H}_i^{\mathrm{MF}}$ を用いて $\langle S_i\rangle$ を計算し，m の満たすべき方程式を導け。

(問 2) 磁場のない場合 $(H=0)$ を考える。

(a) 常磁性相から強磁性相への転移温度 T_c を求めよ。

(b) T_{c} 近傍での自発磁化 M_{s} の近似式を求めよ。

(c) 全温度領域での M_{s} の温度依存性の概略を図示せよ。

(問 3) 次に磁場 H をかけたときを考える。

(a) $T > T_{\mathrm{c}}$ での帯磁率 $\chi = \lim_{H\to 0} \dfrac{M}{H}$ を求めよ。

(b) $T = T_{\mathrm{c}}$ で，磁場が十分弱い時，磁場 H と磁化 M の関係を求めよ。

(c) これらの結果から $T > T_{\mathrm{c}}$，$T = T_{\mathrm{c}}$，$T < T_{\mathrm{c}}$ での磁化曲線の概略を H が負の領域まで含めて描け。一つの図の中に三つを，それぞれの特徴の違いが分かりやすいように描くこと。