埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 28 年 4 月入学試験問題

平成 27 年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2015 年 9 月 10 日 13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで 3 問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，どちらを解答したかを解答用紙に明記すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （50 点）

図のような放物面上を運動する質量 m の粒子を考える。 放物面の中心軸を z 軸とする。円筒座標（r,θ,z）（$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$）を用いると，放物面は $z=\dfrac{1}{2}ar^2$ （a は正）と表される。放物面は滑らかであり，粒子には z 軸方向の下向きに一様な重力（重力加速度の大きさ g）のみが働いている。

問 1 粒子に対するラグランジアンを座標 r,θ を用いて表せ。

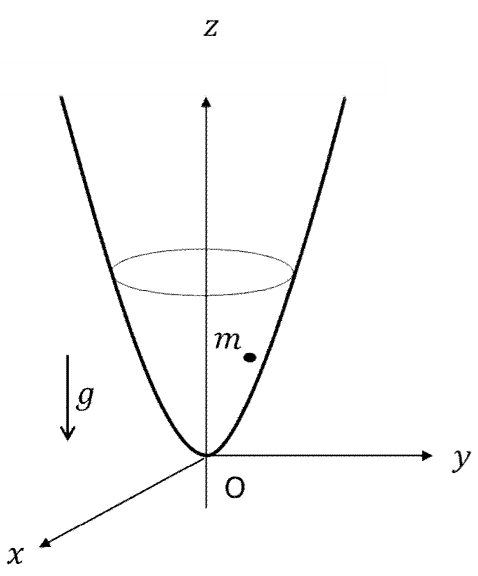
問 2 ラグランジュの運動方程式を求めよ。

問 3 z 軸のまわりの角運動量 J が保存量であることを示せ。

問 4 $r=r_0$ （定数）が問 2 の方程式の解になっているとき，定数 r_0 を求めよ。角運動量 J を用いよ。

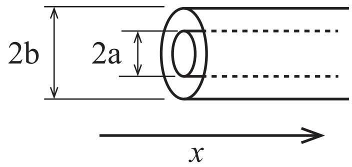
問 5 解 $r=r_0$ のまわりの微小なゆらぎ $\varepsilon(t)$ （$r(t)=r_0+\varepsilon(t)$）に対する運動方程式を求めよ。ただし，$\varepsilon(t)$ の 2 次以上の項は無視してよい。

問 6 ゆらぎ $\varepsilon(t)$ は，ある角振動数 ω で振動する。ω を J,g,m を用いて表せ。



2 （５０点）

下図のような完全導体でできた無限に長い同軸管を考える。内導体の外径を $2a$，外導体の内径を $2b$ とし，内導体と外導体の間は中空で真空とする。外導体は接地してある。真空の誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0 とし，以下の問に答えよ。



問１ 同軸管の単位長さ当たりのキャパシタンス C を求めよ。

問２ 同軸管の単位長さ当たりのインダクタンス L を求めよ。

問３ 同軸管を伝送線と考える。**問１**と**問２**でえられた C と L は同軸管上に一様に分布しているものであるが，あたかも一つの受動素子（集中定数）として表し，同軸管の等価回路を描け。

問４ 同軸管に沿った伝送の方向を x 軸とする。ある位置 x における内導体の電圧 $V(x,t)$，電流 $I(x,t)$ は以下の微分方程式を満たす。$\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ を求めよ。

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = \boxed{\text{A}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \boxed{\text{B}} \tag{2}$$

問５ 微分方程式 (1)，(2) を解くにあたり，同軸管を伝わる電圧信号の周波数を ω とし，時間変化を表す解として複素数の波 $e^{i\omega t}$ を使って，$V(x,t)$ を求めよ。

問６ **問５**で得られた同軸管を伝わる信号の伝搬速度を求め，真空中の光速と一致することを示せ。

3　（50 点）

A または B のいずれか一題を選択し解答せよ。

A. 熱電対を使って，金属が凝固する温度（凝固点）を決める実験を行う。次の**問 1** から**問 6** の設問について答えよ。

問 1　金属内部に温度勾配があるとき，その両端には起電力が生じる。この熱起電力 V は金属両端の温度を t_1, t_2 として，$V = \alpha\,(t_2 - t_1) + \beta\,(t_2^2 - t_1^2)$ と表わせる。ここで α, β はこの金属に固有の定数である。

(1) この式から，温度勾配のある方向を x として起電力の勾配と温度勾配の関係を導き，この温度勾配に掛かる係数を式で示せ。

(2) この係数の意味と起電力発生の原因を，金属の自由電子論の立場から説明せよ。

問 2　熱電対は**問 1** に述べた金属の性質を利用して作られる。

(1) それはどのように製作されるか。熱電対を自作するとき，並びに使用するときの注意点を挙げよ。

(2) 常温付近を含んで広い温度範囲(-200～1300 ℃)で使われる熱電対は何か，その名称を記せ。

問 3　実験ではヒーターに生じさせた熱で試料を溶解する。その後，適当な時点でヒーターに流す電流を切って，熱電対の起電力の変化を時間の経過とともに測定する。

(1) この実験のための“装置一式”の構成を図示せよ。各機器の名称も示すこと。図には電気配線も示し，その材質も明記せよ。
なお，この装置の定温（基準）接点は 0 ℃とする。図には，この定温接点の構成を詳しく示すこと。 図はフリーハンドで良いが，丁寧に書くこと。

問 4　ここで試料として純金属を使う。

(1) 温度が下っていく過程における熱電対の熱起電力の変化を時間に対して図示し，この熱起電力の時間変化の特徴を説明せよ。

(2) このような純金属が凝固する際に観測される特性を熱力学的に議論せよ。

問 5　熱起電力を測定する際，通常，電圧計を用いる。しかしその指示値 V は真の熱起電力 V_{th} とは必ずしも一致しない。

(1) この両者の電圧の関係を数式で示せ。必要な物理量は各自で定義せよ。

(2) 真の値（に近い値）を得るためにはどのようなことに注意すればよいか，答えよ。

問 6　熱電対の起電力は**問 1** に示した熱起電力 V と同様の式で表わされる。その α, β に対応して，熱電対に固有な定数を a, b とする。今，定温接点を 0 ℃とし，数個の温度定点を使う。

(1) この温度定点として少なくとも 4 点を使いたいとき，どのような温度定点が使えるか，物質名とその状態，並びにその温度（おおよその値でも良い）を示せ。

(2) それぞれの温度定点を t_i，その熱起電力を V_i として，最小二乗法を使うことによって，a, b を定める式を求めよ。

B 共鳴器を用いて音波の振動数を測定する。

図1のように, ピストンの伸縮により, 空気柱の長さが変えられる共鳴器を考える。共鳴器に波長λの音波を入力し, 音波が共鳴する位置を空気柱の開口端からの距離として測定する。これらを, 小さいものから $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n$ とする。また, 開口端補正を**図**1のようにxとおく。以下の問いに答えよ。

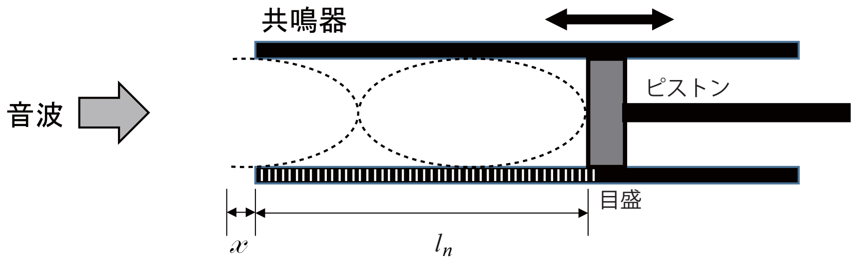


図1

問1 共鳴点として l_1, l_2, l_3 の3点が計測された場合に, 波長λがどうあらわされるか, 答えよ。

問2 共鳴点として l_1, l_2, l_3, l_4 の4点が計測された場合, それぞれ $l_i + x = a_i\lambda$ として波長の係数a_i倍$(i = 1, 2, 3, 4)$で表される。a_1, a_2, a_3, a_4を記せ。

問3 λとxの最確値は, それぞれ, 測定値と共鳴位置との残差の自乗

$$S = \sum_i^n (l_i + x - a_i\lambda)^2$$

を最小にする操作で決定される。測定点数が $n = 4$ 点の場合, **問**2の結果を用いて, λとxの最確値をそれぞれl_1, l_2, l_3, l_4を用いて記述せよ。

(次のページにも問題は続く)

次に, 振動数 $f_{\rm in} = 700.0$ Hz の音波を用いて, 3 つの共鳴点の計測を 5 回おこない, **図** 2 の結果を得た。

(単位 cm)	l_1	l_2	l_3
1 回目	13.25	38.25	63.45
2 回目	12.75	37.90	62.55
3 回目	12.90	37.75	63.75
4 回目	13.15	37.95	63.15
5 回目	12.95	38.15	63.10

表 1. 測定結果

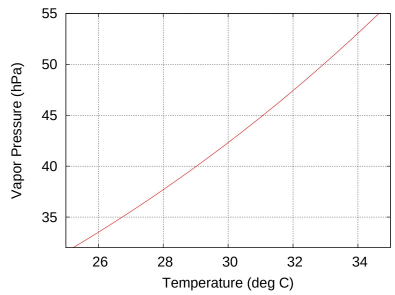


図 2. 水蒸気圧の温度依存性

問 4　l_1, l_2, l_3 の最確値をそれぞれ誤差込みで $A \pm B$ の形で計算せよ。誤差は平均二乗誤差でよい。

問 5　音速 v を 353.5 m/s としたとき, 音波の振動数 $f_{\rm measure}$ を求めよ。なお, 誤差は**問** 4 の結果を伝播させて計算せよ。

問 6　振動数の測定の系統誤差として下記に挙げた要因を考える。下記の **a** から **d** までの項目について, 真値 $f_{\rm in}$ と測定値 $f_{\rm measure}$ のズレが説明できる誤差をそれぞれ定量化し, 計測器機の精度 (目盛の大きさ) と比較せよ。もっとも系統誤差として効きうる項目はどれか、**a** から **d** の記号で答えよ。

a　共鳴点の読み取り位置: l_n (共鳴管の目盛, 5 mm 単位)

b　温度計の読み: T (目盛, 0.1°C 単位)

c　気圧計の読み: p (目盛, 0.1 cmHg 単位)

d　水蒸気圧 p_m の近似式 (表 2)

なお, 音速 v の推定には, 室温 $T = 35$°C および, 大気圧 $p = 760.0$ mmHg の実測値を元に, $v = v_0(1 + 0.00183T)\left\{1 + \frac{3p_m}{16p}\right\}$ の依存性を仮定している。ただし $v_0 = 331.4$ m/s とし, p_m は**図** 2 に示した水蒸気圧 (hPa) である。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 28 年 4 月入学試験問題

平成 27 年秋期入学試験問題

物 理 学 II

2015 年 9 月 10 日 15:00 〜 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から２まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題１・２は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （75 点）

ヘリウム原子の基底状態のエネルギーを摂動論で求めよう。最初に，ヘリウムイオン（He^{+}）の基底状態を考える。このときのハミルトニアンは $\hat{H}_{\mathrm{He}^{+}} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta - \dfrac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$ で与えられる。

ここで $z=2$ である。また、m は電子の換算質量，$-e$ は電子の電荷，ε_0 は真空の誘電率である。

問 1 積分 $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt$ の値を求めよ。ただし、n は正の整数とする（$n=1,2,\cdots$）。

問 2 基底状態の波動関数を $\varphi_0(\mathbf{r}) = A\ \exp(-zr/a)$ とする。規格化条件より，A（A は正）を a で表せ。ここで、$r=|\mathbf{r}|$ とし、a をボーア半径とする。

問 3 上記の波動関数を用いて，基底状態でのポテンシャルの期待値 $\langle V\rangle = \left\langle \varphi_0 \middle| -\dfrac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \middle| \varphi_0 \right\rangle$ をボーア半径 a を用いて表せ。また、この値は $\langle V\rangle = -\dfrac{mz^2e^4}{16\pi^2{\varepsilon_0}^2\hbar^2}$ となることが知られている。これより，ボーア半径 a を m, e, ε_0 を用いて表せ。

次にヘリウム原子の基底状態のエネルギーを摂動で求める。全ハミルトニアンは $\hat{H}_{\mathrm{He}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ で与えられ，

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad \hat{H}_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}$$

と表される。ただし，1, 2 の添え字は位置 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ での二つの電子を区別するためであり，$r_1 = |\mathbf{r}_1|$, $r_2 = |\mathbf{r}_2|$, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ とする。

問 4 電子２個の基底状態の非摂動波動関数を $\Phi(1,2) = \varphi_0(\mathbf{r}_1)\varphi_0(\mathbf{r}_2)$ として，$\hat{H}_0$ の期待値 $\langle \Phi(1,2) | \hat{H}_0 | \Phi(1,2) \rangle$ をボーア半径 a を用いて書き表せ。

問 5 $\hat{H}_1$ を摂動ハミルトニアンと考え，摂動の一次によりエネルギーの変化 $E_1^{(1)} = \langle \Phi(1,2) | \hat{H}_1 | \Phi(1,2) \rangle$ を求めよ。ただし、6 重積分 $\int d\mathbf{x} \exp(-|\mathbf{x}|) \int d\mathbf{y} \dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \exp(-|\mathbf{y}|) = \dfrac{5}{4}(4\pi)^2$（積分領域は全空間）の値を用いて良い。

$\boxed{2}$ （75 点）

(I) 1 辺の長さ L（体積 $V \equiv L^3$）の箱に閉じ込められた質量 m，スピン 1/2 の粒子 N 個よりなる理想フェルミ気体について，以下の設問に解答せよ。

問 1 波数 $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ に対する一電子のエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ を記せ。

問 2 フェルミ波数 k_{F}，およびフェルミエネルギー E_{F} を求めよ。

問 3 絶対零度における全運動エネルギー E_{K} を，問 2 の E_{F} を用いて表せ。

(II) 高密度星である中性子星は自身の大きな重力に抗して，中性子の縮退圧によって支えられていると考えられている。中性子星を一様なスピン 1/2 の中性子からなる理想フェルミ気体とみなすとき，以下の設問に解答せよ。中性子星の半径を R，質量を M とし，また中性子の質量を m，万有引力定数を G とする。なお，解答にあたり系は絶対零度にあるとし，また相対論効果は考慮しなくてよい。

問 4 フェルミエネルギー E_{F} および全運動エネルギー E_{K} を R の関数として表せ。

問 5 重力による中性子星のポテンシャルエネルギー E_{U} は

$$E_{\mathrm{U}} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

となることを示せ。なお，必要があれば一様な球における半径 r の球殻部分のポテンシャルエネルギー dE_{U} は

$$dE_{\mathrm{U}} = -G\frac{M(r)d\mu}{r}$$

で与えられることを利用してよい。$M(r)$ および $d\mu$ はそれぞれ半径 r の球体内側の質量および球殻の微小質量に対応する。

問 6 中性子星の全エネルギーを $E_{\mathrm{Tot}} \equiv E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{U}}$ で与えるとき，R の関数として E_{Tot} の模式図を描け。

問 7 中性子星が最も安定となる半径 R_c を求めよ。また，星の質量 M を増大させたときの R_c の変化について述べよ。