埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 26 年 4 月入学試験問題

平成 25 年秋期入学試験問題

物　理　学　I

2013 年 8 月 21 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで 3 問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，どちらを解答したかを解答用紙に明記すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ (50 点)

フーコー振子（振子の長さL ，おもりの質量m）を考える。地表に$x-y$平面（東の方向にx軸正方向，北の方向にy軸正方向）とそれに垂直にz軸をとり，z軸上に振子の支点を置く。はじめ振子の傾きをθとして，コリオリ力を考えず，$x-z$平面内で振動させた。重力加速度の大きさを g とし以下の問に答えよ。

（問1） 振子のx方向成分についての運動方程式を求めよ。
ただし，振子の振幅はLに比べて小さいものとし，$\sin\theta=\theta$ ，$\cos\theta=1$ の近似が成り立ち，またz方向の運動は無視できるものとする。

（問2） コリオリ力について説明せよ。

次にコリオリ力を考える。緯度α ，地球自転の角速度をωとすると，振子に働くコリオリ力は以下のように書ける。

$$x\text{成分}\ \ 2m\omega\sin\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right) \qquad y\text{成分}\ \ -2m\omega\sin\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

（問3） 上記の微小振動の近似の元で，振子のおもりを$x-y$平面上で振動させたとき，運動方程式のx成分，y成分を平面極座標（$x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$）を用いて表すと以下の式が得られることを示せ。

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}+\omega\sin\alpha\cdot r^2)=0$$

（問4） $t=0$のとき$r=0$として，φ の時間変化を求め，振子がどのような運動をするか述べよ。

2 (50 点)

以下の【2-1】【2-2】に答えよ。

【2-1】

（問 1）磁束Φの時間変化と誘導起電力Vの関係 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ を用いて，電場$\boldsymbol{E}$と磁束密度$\boldsymbol{B}$に関わる，以下の関係式（ファラデーの法則）を導け。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

（問 2）電荷と電流のない真空中（誘電率ε_0 ，透磁率μ_0）でのマクスウェル方程式を記せ。

（問 3）マクスウェル方程式から電場$\boldsymbol{E}$に関する波動方程式を導け。ただし，ベクトル$\boldsymbol{A}$に関わる以下の公式を用いてよい。

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$$

【2-2】

平行板コンデンサー（横a[m] ，縦b[m] ，間隔d[m]）の電極板間に，その電極板と同じ広さで厚さがt[m]の導体金属板を平行に入れた（図 1）。ここで， 真空誘電率をε_0[F・m^{-1}] とし，また電極板間での電場は一様であるとする。

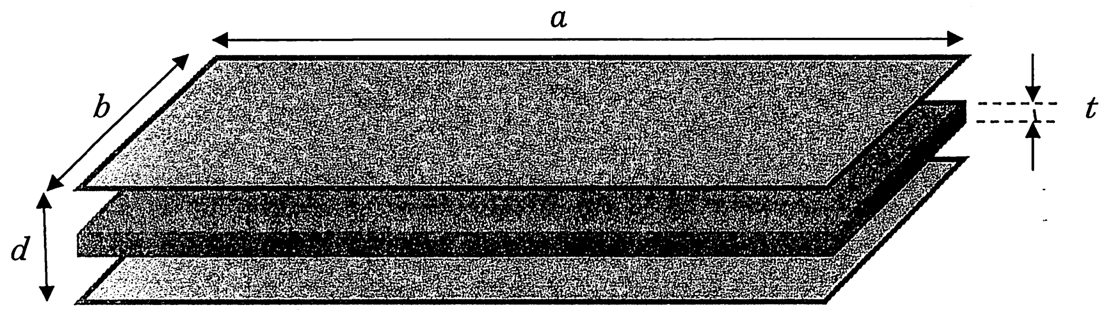


図 1

（問 1）このときのコンデンサーの静電容量を求めよ。

（問 2）両電極板に$\pm Q$[C]の電荷を与えたとき，金属板を入れる前と入れた後のエネルギーの変化を求めよ。

次に金属板の代わりに厚さがd[m]で，コンデンサーと同じ大きさの誘電体板（誘電率ε[F・m^{-1}]）を電極板間に平行にx[m]（$0 < x < a$）だけ差し込んだ（図 2）。このとき，電極板間で誘電体板端付近での電場のゆがみは無視できるものとする。

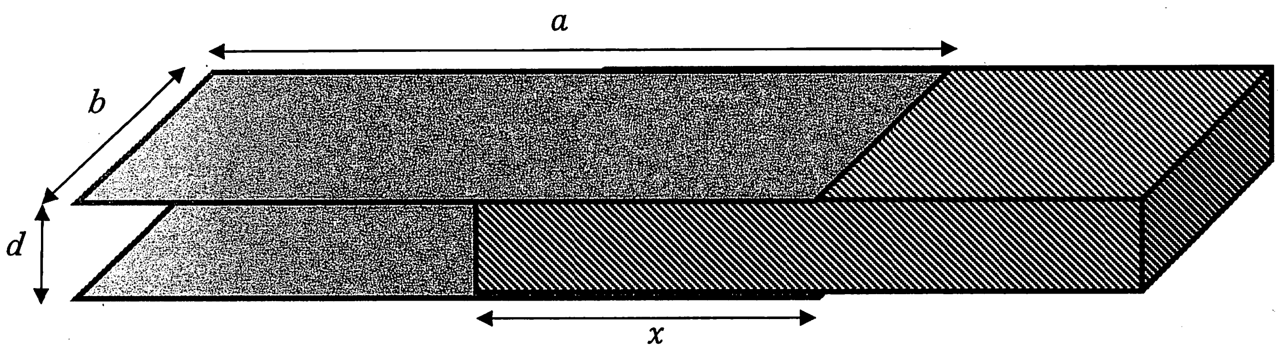


図 2

（問 3）このときのコンデンサーの静電容量を求めよ。

（問 4）この電極板に電荷$\pm Q$[C]を与えたとき，この誘電体板を引き出そうとするとそれに逆らうように力が働く。その力の大きさを求めよ。

3 A(50 点)

(問 1) 一般に, 金属試料や比較的電気抵抗が小さい半導体試料の電気抵抗を測定する場合には, 試料に 4 個の電極をつける 4 端子法が採用される。これは, 電極には接触抵抗が存在し, 2 端子測定では, この接触抵抗の寄与を除外できないからである。4 端子測定では, なぜ接触抵抗の影響をうけないかについて説明せよ。ただし, 試料, 電流源, (内部抵抗の十分大きな) 電圧計の配線図を書き, 配線図を使って説明せよ。

(問 2) 低温や高温での電気抵抗測定では, 試料を含む配線上に熱起電力が発生する。このような状況で, 試料の電気抵抗を正確に測定する方法について説明せよ。

以下では, (問 2) のような熱起電力を考えないとする。

(問 3) より正確な電気抵抗の測定法としては, 電圧 V と電流 I を測定し, 線形関数である $I-V$ 特性 (V の I 依存性) の傾きから抵抗値を得るというものがある。しかし, 電流を大きくしていくと, ジュール熱の効果により, $I-V$ 特性が線形からずれてくる。試料が金属と (真性) 半導体の場合において, ジュール熱によって $I-V$ 特性がどのように線形からずれるかについて, グラフを示して説明せよ。ただし, $I-V$ 特性の具体的な関数形を求める必要はなく, 定性的な説明でよい。

抵抗体からの熱の放出は, 抵抗体のまわりの気体の圧力 P と抵抗体の温度 T に依存し, 低圧力領域での単位時間あたりの熱の放出 Q [J/sec] は, $Q = AP(T-T_0) + Q_1(T)$ で与えられる。ここで, $Q_1(T)$ は, 輻射と配線を介した熱の放出であり, 気体の圧力には依存しない。A は正の定数, T_0 は T より小さい値を持つ正定数である。今, 抵抗体を含む回路が, 気体の圧力が変化しても抵抗体の抵抗値が一定値 R_C になるように, 抵抗体に流す電流 I を変化させるフィードバック回路を組んでいるとする。

(問 4) このとき, 圧力 P と流した電流 I の間に成り立つ関係式を, 定数を用いて書き表せ。ただし, 与えられた定数以外のものを使用する場合には, 定義を書いてから使用すること。

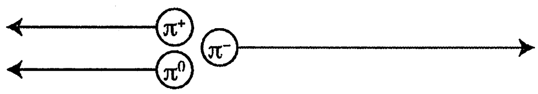
(問 5) $P=40$ Pa のときの電流値が 100 mA で, $P=22$ Pa のときの電流値が 80 mA であった。$P=8$ Pa のときの電流値を求めよ。

$\boxed{3}$ B (50点)

静止した陽子 p と反陽子 $\bar{p}$ が対消滅すると, 3つの π 中間子が発生する。

$$p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

数値計算を簡単にするため, 陽子と反陽子の静止質量は等しく, $M_p = M_{\bar{p}} = M$ とおく。また, $M_p c^2 = M_{\bar{p}} c^2 = Mc^2 = 1000$ MeV とする。3つのパイ中間子の静止質量は等しく, $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = m_{\pi^0} = m$ とおく。また, $m_{\pi^+}c^2 = m_{\pi^-}c^2 = m_{\pi^0}c^2 = mc^2 = 100$ MeV とし, 以下の問に答えよ。

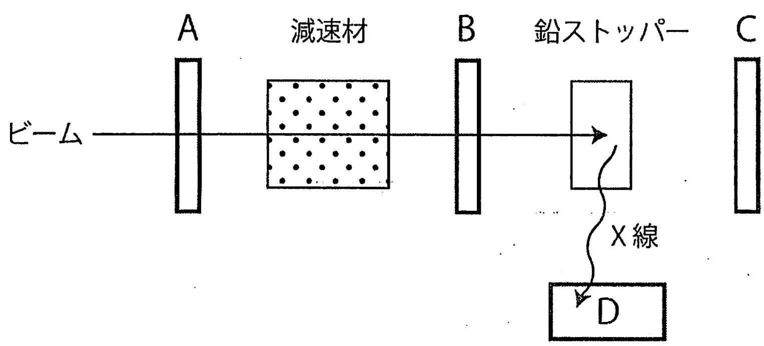


(問 1) π^- が, 上図のように π^0, π^+ と一直線上で反対方向に放出されるとき, π^- の全エネルギーを M, m, c で表せ。また, その値は π^- の静止質量の何倍か。ここで, π^0 と π^+ のそれぞれの全エネルギーは等しいとする。

この π^- は飛行中に μ^- と反ニュートリノ $\bar{\nu}_\mu$ に崩壊する。

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

この崩壊によって π^- の数が減少し, μ^- の数が十分多くなったところで, 下のような実験装置を設置し, 発生した μ^- ビームを入射した。μ^- は減速材で速度を落とし, 鉛ストッパーで静止した。A, B, C はプラスチック シンチレーション検出器である。



(問 2) 検出器 A, B, C の信号を処理して論理信号をつくった。A ∩ B ∩ $\bar{\mathrm{C}}$ の条件を満たす同時計数事象を鉛ストッパーで静止した μ^- の事象とみなすことができる。その理由を述べよ。また, 条件を A ∩ $\bar{\mathrm{C}}$ あるいは B ∩ $\bar{\mathrm{C}}$ にすると問題はあるか。問題がある場合その理由を述べよ。

(問 3) 検出器 A でビームのエネルギー スペクトルを測定したい。どのような回路を組めばよいか。ブロック ダイヤグラムを描き, 回路の機能を説明せよ。

μ^- が静止した鉛ストッパーの中から, 離散的なエネルギーを持ついくつかの X 線がほぼ同時に放出された。

(問 4) この X 線のエネルギーを検出器 D で測定したい。測定するエネルギー範囲を 100 keV 周辺と限定するとき, どのような検出器が適当か。下記の中から 1 つあげ, その理由を説明せよ。

1. GM 管
2. 比例計数管
3. 電離箱
4. NaI(Tl) シンチレーション検出器
5. プラスチック シンチレーション検出器
6. Si 半導体検出器
7. Ge 半導体検出器
8. その他（1 ～ 7 にないものをあげてもよい）

(問 5) 検出器 D で X 線を測定しているとき, バック グラウンドとしてどのようなものが予想されるか。2 つ以上あげ, その起源を説明せよ。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 26 年 4 月入学試験問題

平成 25 年秋期入学試験問題

物 理 学 II

2013 年 8 月 21 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は 1 から 2 まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題 1・2 は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

1 (75点)

スピンをもつ粒子の磁場中での運動を量子力学を用いて考える。粒子の状態は2成分波動関数で表され，スピン演算子はそれに作用する 2×2 行列 $\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ によって表される。ここで，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ はパウリ行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

である。x 軸方向を向いた一様な磁場 $\boldsymbol{B}=(B,0,0)$ (B は正の定数) がある場合を考え，ハミルトニアンが，スピンの x 成分 S_x を使って，

$$H=H_0-\frac{2\mu B}{\hbar}S_x \qquad (\mu \text{ は正の定数})$$

と書けるとする。ここで，H_0 はスピンに依存しない項である。H_0 は H と交換するので，H の固有状態を求める際に，それが H_0 の固有状態であるとしても一般性を失わない。以下では，H_0 の特定の固有値 $\mathcal{E}$ の固有状態である

$$\psi(\boldsymbol{r})=\phi(\boldsymbol{r})\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \qquad (\alpha,\beta \text{ は複素定数})$$

という形の状態だけを扱う。ここで，$\phi(\boldsymbol{r})$ は，$H_0\phi(\boldsymbol{r})=\mathcal{E}\phi(\boldsymbol{r})$，$\int d^3\boldsymbol{r}\,|\phi(\boldsymbol{r})|^2=1$ を満たす関数である。このような状態は，2つの状態

$$\psi_+(\boldsymbol{r})=\phi(\boldsymbol{r})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \psi_-(\boldsymbol{r})=\phi(\boldsymbol{r})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

の線形結合によって $\psi(\boldsymbol{r})=\alpha\,\psi_+(\boldsymbol{r})+\beta\,\psi_-(\boldsymbol{r})$ と表すことができる。

(問1) $\psi_+(\boldsymbol{r})$, $\psi_-(\boldsymbol{r})$ がスピンの z 成分 S_z の固有状態であることを示し，その固有値を求めよ。

(問2) $H\psi_+(\boldsymbol{r})$, $H\psi_-(\boldsymbol{r})$ を，$\psi_+(\boldsymbol{r})$, $\psi_-(\boldsymbol{r})$ の線形結合で表せ。

(問3) H の固有値 E_1, E_2 ($E_1<E_2$) と規格化された固有関数 $\psi_1(\boldsymbol{r})$, $\psi_2(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

(問4) 時刻 t における波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ を，問3で求めた H の固有関数 $\psi_1(\boldsymbol{r})$, $\psi_2(\boldsymbol{r})$ の線形結合によって

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=c_1(t)\,\psi_1(\boldsymbol{r})+c_2(t)\,\psi_2(\boldsymbol{r})$$

と表すとき，シュレーディンガー方程式を使って係数関数 $c_1(t)$, $c_2(t)$ を求めよ。ただし，初期条件を，$c_1(0)=c_1$, $c_2(0)=c_2$ とする。

(問5) 時刻 $t=0$ における波動関数が $\psi(\boldsymbol{r},0)=\psi_+(\boldsymbol{r})$ のとき，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ を $\psi_1(\boldsymbol{r})$, $\psi_2(\boldsymbol{r})$ の線形結合によって表せ。

(問6) 問5の場合に，時刻 t において S_z を測定するとき，その値が $+\frac{1}{2}\hbar$ である確率 $P_+(t)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ (75 点)

磁性体のモデルとして，隣り合う格子点のスピン間に強磁性的交換相互作用 $J > 0$ を持つ，1次元の Ising 模型を表わすハミルトニアン

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{1}$$

の統計力学を正準集合により考える。ここで σ_i は i 番目の格子点におけるスピンを表わす Ising 変数で，$\sigma_i = \pm 1$ $(i = 1 \sim N)$ である。磁気モーメント m_i は $\mu\sigma_i$ で与えられる。N はスピンの総数で，σ_{N+1} は σ_1 に等しいとする (周期的境界条件)。H は外部磁場の強さ，μ は磁気モーメントの大きさを表わす。T は絶対温度で，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$，$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数とする。

(問 1) 温度 $T > 0$，磁場 $H = 0$ のもとで，$N \to \infty$ の極限での分配関数 $Z_N = \mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}})$ を次のようにして求めよ。まず恒等式 $\exp(\beta J \sigma_{i+1}\sigma_i) = \cosh(\beta J) + \sigma_{i+1}\sigma_i \sinh(\beta J)$ を証明し，これを用いて Z_N を求めよ。

(問 2) $H = 0$ のときの比熱を求め，温度変化を図に描け。

(問 3) 式 (1) の右辺をそのまま用いて，温度 $T > 0$，磁場 $H > 0$ のもとでの分配関数 Z_N を書け。

(問 4) 前問の Z_N は

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} A(\sigma_1, \sigma_2) A(\sigma_2, \sigma_3) \cdots A(\sigma_N, \sigma_1) \tag{2}$$

の形に書ける。$A(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ を求めよ。$A(\sigma_i = \pm 1, \sigma_{i+1} = \pm 1)$ を 2×2 の行列とみなしたとき，行列 A の具体形を求めよ。

(問 5) 前問の行列 A を用い，$Z_N = \mathrm{Tr}(A^N)$ と書ける。行列 A の固有値を求め，それを用いて，$N \to \infty$ での Z_N を求めよ。ただし，$Z_N = Z_1^N$ の形になるので，Z_1 を求めればよい。

(問 6) 微小な磁場をかけたときの分配関数 Z_1 を磁場 H の 2 次までテーラー展開し，磁化 $M = N\mu\langle\sigma\rangle$ を求めよ。ただし，すべての $\langle\sigma_i\rangle (i = 1 \sim N)$ は等しく，それを $\langle\sigma\rangle$ とおいた。これを用い，帯磁率 $\chi = \lim_{H\to0}(\partial M/\partial H)$ を求め，温度変化を図に描け。

(問 7) この系は，有限温度で相転移を起こすか，起こさないか，答えよ。またその理由を，出来るだけわかりやすく説明せよ。