埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 29 年 4 月入学試験問題

平成 28 年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2016 年 9 月 8 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 5 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで３問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，選択しなかった問題の解答用紙には×印を記して提出すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 5 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （50 点）

大きさの無視できる質量 m の 2 つのおもり 1, 2 が, 長さ l の軽い棒の両端についている。図のように, 水平方向に x 軸を, 鉛直方向に y 軸を選び, 鉛直下方を y 軸の正の向きとする。おもり 1 は, x 軸に沿って自由に移動できるようになっている。おもり 2 は, xy 鉛直平面内を運動するとする。おもり 1 の座標を x, 棒が鉛直下方となす角を θ とする。重力加速度を g として, 以下の問に答えよ。

問 1 おもり 2 のデカルト座標 (x_2, y_2) を, x と θ を使って表せ。

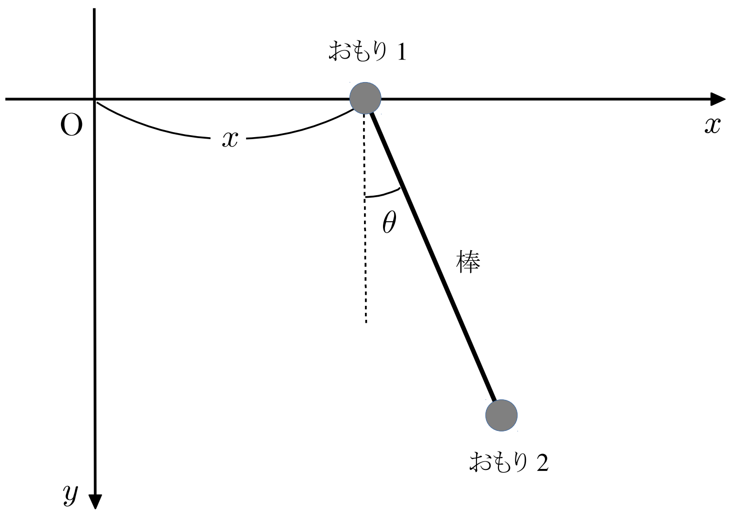
問 2 一般化座標 x, θ を使って, この系のラグランジアンを書け。

問 3 x と θ に対する運動方程式を求めよ。

問 4 x に共役な一般化運動量 p を求め, それが保存することを示せ。

問 5 $p = 0$ の場合を考え, (x を含まない) θ に対する微分方程式を求めよ。

問 6 $p = 0$ の場合に, θ が小さい微小振動の周期 T を求めよ 。



図

2 （50 点）

点電荷が作る電場・電位の例として，図１に示すように，z 軸上に原点をはさんで，距離 $2d$ だけ離れておかれた点電荷 $\pm q$ を考える。電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ に関わる以下の問に答えよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

問１ これらの点電荷がつくる，位置 A における電位 $\phi(x, y, z)$ を直交座標系にて表せ。

問２ 点 A における電位 ϕ を r, z, q, d を用いて表せ。ここで r は原点 O から A までの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。ただし，距離 $2d$ は r に比べて十分に小さいものとして，$\left(\dfrac{d}{r}\right)^2$ のオーダーの項を無視し，さらに近似式 $(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - \dfrac{1}{2}\alpha$ が成り立つとして解答せよ（$|\alpha| << 1$ の場合）。

問３ 電気双極子モーメントの大きさを $|\boldsymbol{p}| = p = 2qd$ とし，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ による，位置 A における電場の x, z 成分 E_x，E_z を求めよ。

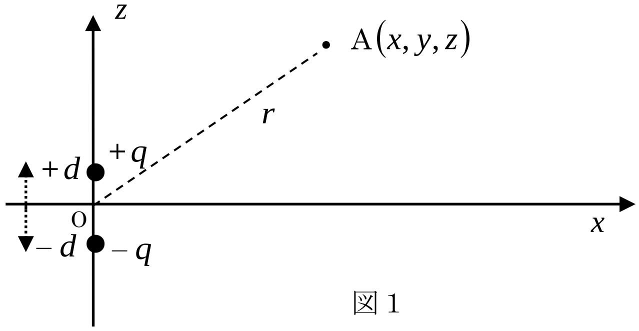


図１

次に電荷が線上・面上に分布する場合について考える。ただし，真空の透磁率を μ_0 とする。

問４ 線密度 λ で一様に帯電している無限に長い線状帯電体から垂直方向に距離 r の位置での電場の大きさ E を求めよ。

問５ 半径 a の導体球面上に全電荷量 Q が一様に分布している。中心 O から r の距離での電位 ϕ を求めよ。

問６ 図２に示すような，面積 S の２枚の金属円盤からなる平行板コンデンサーを考える。円盤上に電荷が一様に分布し，それが $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$ で時間とともに変化するとき（ω は角周波数），その円盤状電極間の電場 E は時間とともに変化し，円盤間には変位電流が生じる。コンデンサーの中心軸からの距離を r として，コンデンサー内に生じる磁束密度を求めよ。

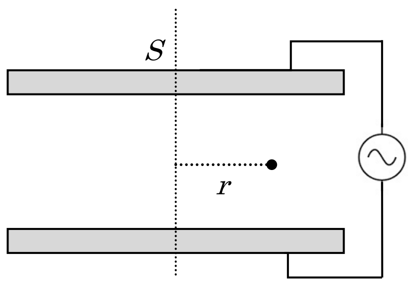


図２

$\boxed{3}$ (50 点)

AまたはBのいずれか一題を選択し解答せよ。

A

解答は指定された解答用紙を用いること。

問 1 ある物理量 x と y のあいだには，$y = ax + b$ の関係が成立すると期待されているとする。測定により n 個のデータの対 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ を得た。$d_i = y_i - ax_i - b$ により各点の残差 d_i を定義し（ただし $i = 1$ から n），残差の二乗和を最小にすることにより，定数 a と b を決める式を求めよ。

問 2 金属の比熱 C の温度 T に対する依存性は十分低温において，$C = \gamma T + \beta T^3$ と表せる。右辺の 2 つの項が各々どのような起源によるか述べよ。

問 3 ある金属の比熱を低温で測定したところ，下表のようになった。

T(K)	C(mJ/Kmol)
2.0	1.8
4.0	6.0
6.0	15.0
8.0	30.4

解答用紙のグラフに縦軸を C/T，横軸を T^2 にとり，実験データをプロットせよ。

問 4 **問 1** の結果を用いて，定数 γ と β を求めよ。

B

（解答にあたっては配布された定規を使ってよい。解答は指定された解答用紙を用いること）

多数の放射性同位元素核が崩壊するとき，それぞれの崩壊は独立現象であり，確率的な現象である。このとき，この崩壊現象に対しては平均寿命τと半減期Tが定義される。

問１ 半減期Tの定義を記し，時刻tにおける未崩壊核数$N(t)$を時刻$t=0$における核数$N(0)$と半減期Tを用いて表せ。また，$N(t)$を$N(0)$とτを用いて表せ。

質量数 204，平均寿命$\tau=5.5$年の原子 **Tl** を考える。ただし，原子質量単位は $1\mathrm{u}=1.7\times10^{-24}\,\mathrm{g}$ とする。

問２ Tl の平均寿命から半減期 T[年]を求めよ。ただし，ln2=0.69 を用いよ。

問３ 時刻t=0 年 にて 0.7 g の **Tl** が存在するとき，その時の原子数を求め，時刻tにおける残存原子数$N(t)$をt=0－10 年の範囲で解答用紙中の片対数グラフに表せ。ただし，$\dfrac{1}{e}=0.37$ とする（eは自然対数の底)。

放射線源からの距離を変えて，単位時間あたりの放射線数の測定を行った。同じ測定を 5 回繰り返し，以下の結果を得た。ここで距離をx，測定ごとの放射線数を$y_1\sim y_5$とし，$\langle y\rangle$は$y_1\sim y_5$の平均値である。

距離x［cm］	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\langle y\rangle$
x=20	2085	2187	2044	2164	2105	2117
x=50	328	322	316	332	352	330
x=100	85	75	68	97	80	81
x=200	21	17	32	14	26	22

問４ xと$\langle y\rangle$の関係を解答用紙中の両対数グラフに表せ。

問５ x=200cm について測定値y_i(i=1～5)の標準偏差を求め，その大きさを**問４**で記したグラフ用紙上に示せ。

問６ **問４**で求めたグラフからxと$\langle y\rangle$の関係を表す式，$\langle y\rangle=ax^b$の指数bの概算値を求めよ。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 29 年 4 月入学試験問題

平成 28 年秋期入学試験問題

物　理　学　II

2016 年 9 月 8 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から２まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題１・２は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （75 点）

以下の問の解答において, 波動関数のベクトル表現は正規直交化して示すこと.

問 1 S=1/2 スピンを持つ単一の電子を考える. スピンの z 成分が $\hbar/2$, $-\hbar/2$ となる固有関数を α, β とする. パウリ行列は以下のように与えられる.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) 与えられたパウリ行列に従い, α, β のベクトル表現を示せ.

(b) スピンの y 成分が $\pm\hbar/2$ となる固有関数のベクトル表現を示せ.

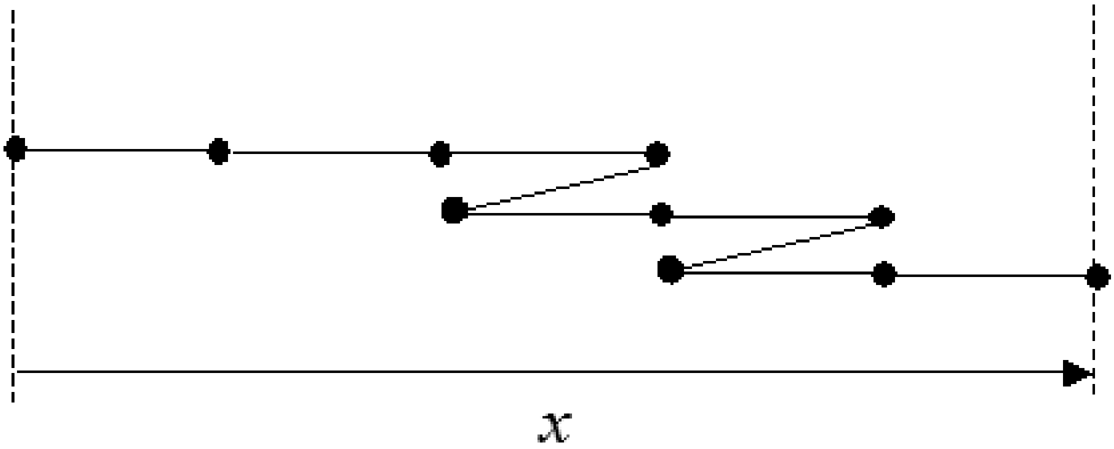
問 2 S=1/2 を持つ 2 つの粒子 1, 2 を考える. 各粒子に対して, スピンの z 成分が $\hbar/2$, $-\hbar/2$ となる固有関数を考える. 粒子 1 に対する固有関数を α_1, β_1, 粒子 2 に対する固有関数を α_2, β_2 とする. その時, 2 粒子系の波動関数はそれらの直積 $\alpha_1 \otimes \alpha_2$, $\alpha_1 \otimes \beta_2$, $\beta_1 \otimes \alpha_2$, $\beta_1 \otimes \beta_2$ の線形結合として表現できる.

(a) 全スピン演算子 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$ を考える. 全スピン演算子の x, y, z 成分 (S_x, S_y, S_z), および $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ の行列表現を求めよ.

(b) 2 粒子系のハミルトニアン $\mathcal{H} = s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y} + H(s_{1z} + s_{2z})$ を考える. ここで, $s_{1\mu}$, $s_{2\mu}$ は粒子 1, 2 のスピンの μ 成分である ($\mu = x, y, z$). また, H は定数である. $\mathcal{H}$ の固有値と固有関数をすべて求めよ.

$\boxed{2}$ （75 点）

N 個 ($N \gg 1$ とする) の棒状の分子が下図のように順に結合した鎖を考える。黒丸であらわされた結節点で，隣接した分子は互いにまっすぐになるか，または反対方向に折れ曲がることができる。(図で，分子が斜めになっているように見えるのは作図上の都合であって，実際には, 分子は直線状に並んでいるものとする。) 分子は十分に細く，分子同士の重なりの効果や，結節点以外の分子間の相互作用は無視できるものとする。それぞれの分子の長さを a とし，始点から測った鎖の端の位置を x として，以下の問に答えよ。必要なら，$N \gg 1$ に対して成り立つ近似式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いてもよい。また，Boltzmann 定数を k_{B} とする。



図

問 1 始点からたどって行くとき，結節点から右向きに進んでいる分子の数を N_+，左向きに進んでいる分子の数を N_- ($N_+ + N_- = N$) とする。N_+ と N_- を指定したときの，鎖の微視的な配列の仕方の総数 W を N，N_+，N_- であらわせ。また，x を a，N_+，N_- であらわせ。

問 2 N，N_+，N_- が 1 より十分大きい時，この鎖のエントロピー S を x の関数として求めよ。解答は，x，N，k_{B}，a を用いて書くこと。

問 3 温度 T の熱平衡状態でのヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, x) = E - TS(x)$ と，張力 X（ここでは，x の方向に引っ張る力とする）を与える式 $X = \partial F / \partial x$ により，X を x の関数として求めよ。ただし，結節点のエネルギーは，隣り合う分子が互いにまっすぐか折れ曲がっているかには依存しないとする。したがって，$E = 0$ である。また，a は十分小さく，x は連続変数とみなしてよいものとする。

問 4 x が小さいときにフックの法則 $(X = Kx)$ が成り立つことを示し, ばね定数 K を求めよ。

分子の向きを表わす変数 $\sigma_i = \pm 1$（$i = 1 \cdots N$）を導入し，$\sigma_i = 1$ なら結節点から右向き，$\sigma_i = -1$ なら左向きとする。これを用いると，鎖の長さ x は $x = a\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$ と書けるので，分子の長さを x に固定したときの，分子の配列の場合の数 $W(x)$ は,

$$W(x) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \delta\left(\frac{x}{a} - \sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)$$

と書ける。$\delta(\cdots)$ はデルタ関数である。

問 5 張力一定の場合に対する分配関数

$$Z(T, X) = \int_{-Na}^{Na} \frac{dx}{a} W(x) e^{\beta X x}$$

を計算せよ。ただし，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ である。また，積分に当たっては，$x \sim 0$ 近傍でも x を連続変数として扱ってよいものとする。

問 6 T と X の関数としてのギブスの自由エネルギーを $G(T, X) = E - TS - Xx$ とすると，$G(T, X) = -k_{\mathrm{B}}T \log Z(T, X)$ で与えられる。長さ x の平均値 $\langle x \rangle = -\frac{\partial G}{\partial X}$ を計算せよ。

問 7 張力が小さい極限での $\langle x \rangle$ と X の関係を求め，問 4 と比較せよ。