埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 30 年 4 月入学試験問題

平成 29 年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2017 年 9 月 7 日　13:00 ～ 14:30

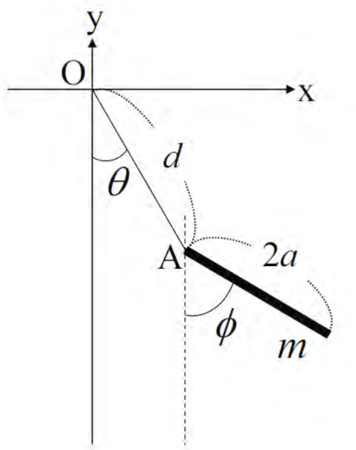
注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から３まで 3 問ある。１および２はすべて解答すること。３についてはＡまたはＢのいずれかを解答し，どちらを解答したかを明記すること。
5. 問題１・２・３は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$　（５０点）

右図のように、固定点 O に長さdの糸が結び付けられており，その先端 A に質量m，長さ$2a$の一様な棒が取り付けられている。棒と糸は鉛直面内で自由に回転できるとする。固定点 O を座標の原点，図の矢印方向をそれぞれx，y軸の正の方向とし，糸および棒の鉛直方向とのなす角をそれぞれθ，ϕとして以下の問に答えよ。糸の質量はなく，糸および棒は伸縮しないものとする。また糸はたるまないものとせよ。



（問１） 棒の先端 A の座標x_{A}，y_{A}および棒の重心 G の座標x_{G}，y_{G}をd，a，θおよびϕの中から必要なものを用いて表せ。

（問２） 重心を通り，紙面に垂直な軸の周りでの棒の慣性モーメントI_{G}を求めよ。

（問３） 系の運動エネルギーK，位置エネルギーUおよびラグランジアンLをm，d，a，θ，ϕおよびI_{G}の中から必要なものを用いて表せ。

次にθ，ϕともに十分に小さいとして鉛直面内での微小振動を考える。

（問４） このときのラグランジアンをm，d，a，θおよびϕの中から必要なものを用いて表せ。ただしζを微少量としたとき　$\cos\zeta \simeq 1-\dfrac{1}{2}\zeta^2, (\zeta \ll 1)$ が成り立つことを利用し，また変数の積の３次以上の項は無視せよ。（例：$\theta^2\dot{\phi} \to 0$）

（問５）（問４） のラグランジアンを用いて，ラグランジュの運動方程式をm，d，a，θ，ϕおよびI_{G}の中から必要なものを用いて表せ。

（問６） $d=\dfrac{4}{3}a$とし，**（問２）**でのI_{G}の表式を代入し，**（問５）**の運動の基準振動の角振動数を求めよ。

$\boxed{2}$ （５０点）

1)　真空中（誘電率 ϵ_0）で，半径 R の球に電荷が一様な密度 ρ で分布するとき，中心 O からの距離 r の関数として

1-1)　生じる電場と静電ポテンシャルを求めよ．

1-2)　それらを図示せよ．

1-3)　静電エネルギーを求めよ．

2)　図 1 のように半径 R の接地された導体球がある．x 軸上の点 $\mathrm{P}(a, 0)$ に電荷 Q をおいたとき

2-1)　アポロニウスの円を利用して境界条件を満たすよう点 S に鏡映電荷を考え，導体球の外側の任意の点 $\mathrm{T}(r, \theta)$ における静電ポテンシャルを求めよ．ここで $\mathrm{OS} = \frac{R^2}{a}$ である．

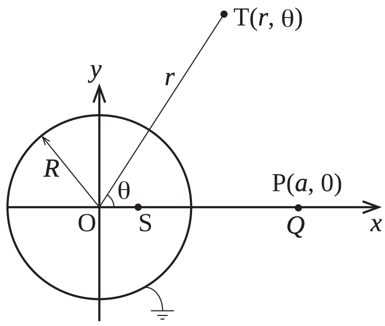


図 1

2-2)　次に，図 2 のように，電荷 Q が y 軸に平行に正の方向へ速度 v で等速運動するとき，導体球に流れる電流を Q, R, a, y, v を使って表せ．

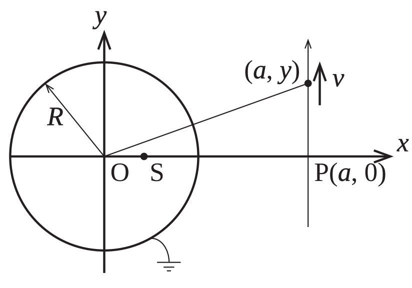


図 2

3)　図 3 のような C 型の鉄材の一部にコイルを N 回巻いて，定常電流 I を流した．図に示されているギャップの中心，点 P における磁束密度の大きさを求めたい．真空の透磁率を $\mu_0(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m})$，鉄の透磁率を μ とする．また，点 P を通り，鉄材を一周する経路の長さを L とする．鉄材やギャップの端の効果は考えない．

3-1)　積分形のアンペールの法則を書き，その意味を述べよ．

3-2)　$\mu \gg \mu_0$ という関係を使って，磁束密度の大きさが電流 I に比例し，ギャップ d に反比例することを示せ．

3-3)　このギャップが 10 cm のときに 1 T の磁束密度を発生させるには電流はいくら流せばよいか．ただし、$N = 100$ とする．

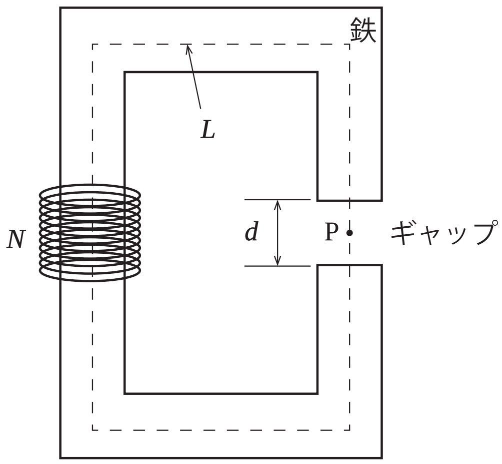


図 3

3 （50 点）

A または B のいずれか一題を選択し解答せよ。

必要であれば以下を用いよ。

$\sqrt{2} \simeq 1.41,\ \sqrt{3} \simeq 1.73,\ \sqrt{5} \simeq 2.24,\ \sqrt{7} \simeq 2.65$

A

金属元素（ターゲット）の特性 X 線を用いた粉末 X 線回折実験に関して以下の問に答えよ。表 1 は Ni（ニッケル）及び Cu（銅）の特性 X 線と K 吸収端の波長を示したものである。

表 1

ターゲット元素	特性 X 線の波長 (Å)			K 吸収端 (Å)
	$K\alpha_1$	$K\alpha_2$	$K\beta_1$	
Ni	1.658	1.662	1.500	1.488
Cu	1.541	1.544	1.392	1.380

(問 1) 本測定において微細な粒径をもつ粉末状の試料を用いる理由を説明せよ。

(問 2) 銅ターゲットを用いる場合には, X 線回折装置の光学系にフィルターとして Ni 箔を用いる。Ni 箔が果たす役割とその仕組をわかりやすく説明せよ。

(問 3) 図 1 に銅ターゲットより発生させた特性 X 線を用いて測定した, 銅の粉末試料の回折パターンを示す。回折角度が小さい位置に観測される回折ピーク A や B は 1 本に見えるが, 角度の大きい回折ピーク C, D, E は 2 本に分裂したように見える。このような回折パターンが得られる理由を説明せよ。

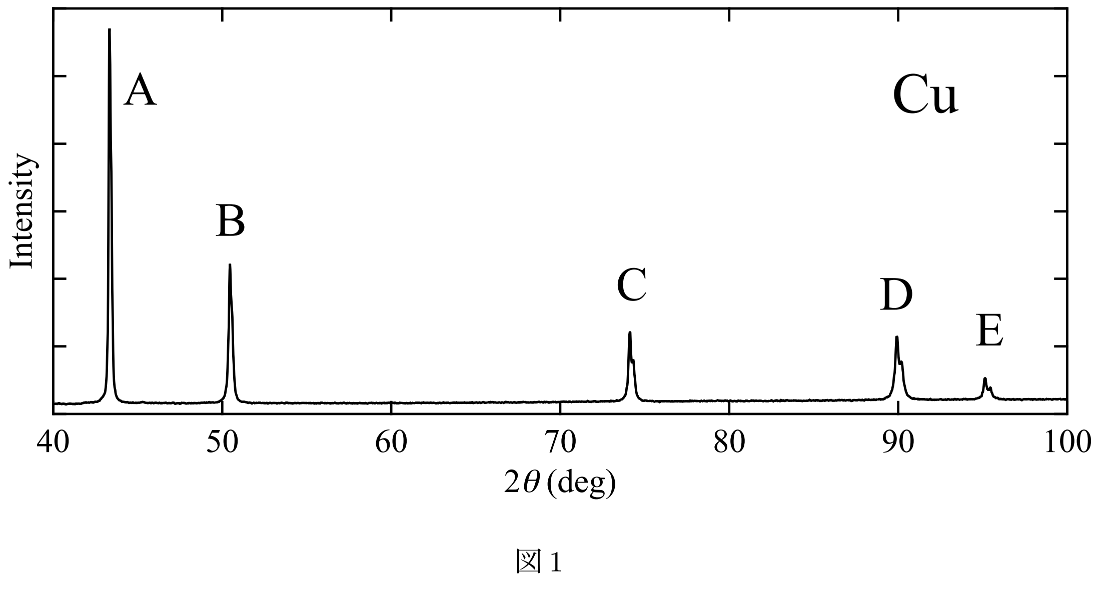


図 1

(問 4) 銅の結晶構造は面心立方構造である。銅の原子散乱因子を f_{Cu} として結晶構造因子 F_{hkl} を計算し, 消滅則（特定のミラー指数 $(h\ k\ l)$ の回折線が観測されないこと）がわかるようにミラー指数の条件ごとに整理せよ。$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ は単位胞中の n 番目の原子座標を示す。

$$F_{hkl} = \sum_n f_{\mathrm{Cu}} \exp\{2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)\}$$

(問 5) 問 4 の考察のみから, 図 1 に示された各回折ピークにミラー指数を振り付けることを試みる。A~E の回折ピークにどのようなミラー指数を振り付けることが適当か理由とともに説明せよ。その際, 測定を開始した角度より低角側には回折ピークが現れないことが分かっているものとする。問 5 および問 6 の解答において, ミラー指数 $(h\ k\ l)$ に対応する面間隔を説明で用いる場合には, d_{hkl} と表記すること。

(問 6) 図 1 の回折ピークの回折角度 2θ とその $\sin\theta$ を表 2 に示す。まず, 最も角度の大きいピーク E のデータを用いて銅の格子定数を有効数字 3 桁で求めよ。また, 求めた格子定数を用いて, 問 5 で振り付けたミラー指数が適切であるかどうか, ピーク A とピーク B について確認せよ。

表 2

記号	2θ (deg)	$\sin\theta$
A	43.3	0.369
B	50.5	0.427
C	74.1	0.603
	74.3	0.604
D	89.9	0.706
	90.2	0.708
E	95.1	0.738
	95.5	0.740

B

NaI(Tl) シンチレーターを用いて放射線源 ^{22}Na の絶対強度を測定する．放射線源は点源と見なせるくらい十分小さく，**図 1** の経路を経て ^{22}Ne に崩壊し等方的にガンマ線を放射するものとする．放射線源は線源台に固定され，**図 2** のようにシンチレーターから 2.0 m 離れて設置する．シンチレーターは一辺 5 cm の立方体で，比重は 3.7×10^3 kg/m^3，ガンマ線の入射エネルギー1 MeV あたり 32,000 光子のシンチレーション光を発光する．光電子増倍管（PMT）とシンチレーター結晶との光学カップルでは光のロスはなく，PMT の光電面での効率は 25% とする．

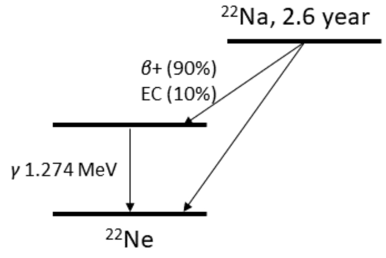


図 1

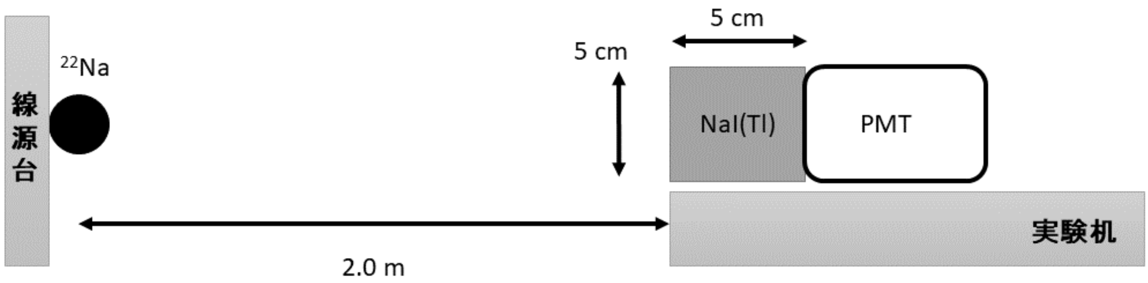


図 2

このセットアップを用いて得られたエネルギースペクトルが**図 3** である．以下の問いに答えよ．なお，**問 2, 3, 4** は有効数字２桁で答えよ．

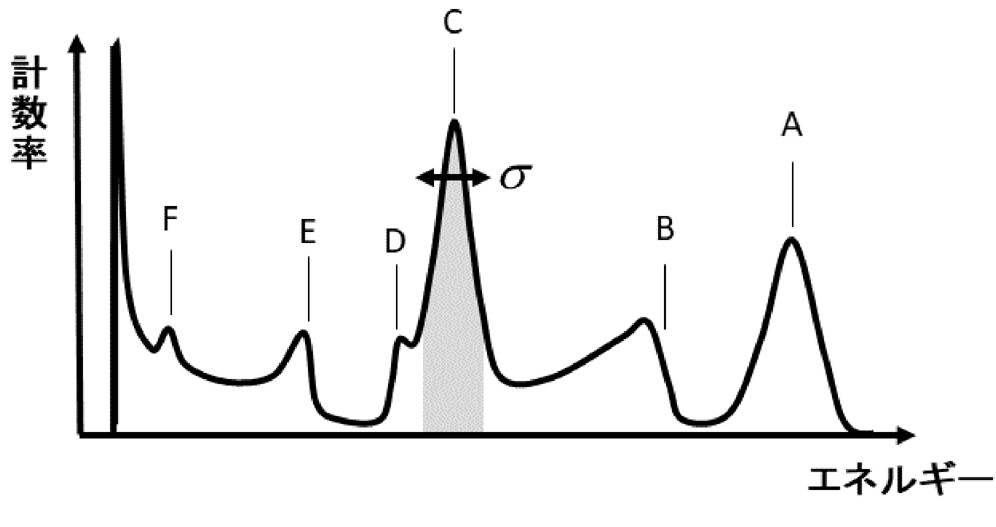


図 3

問1. **図 3** に見られる構造 A, B, C, D, E, F はどのような光子を計測した結果か，**図 4** の，線源から放射される図(i)~(v)と検出部の図(a)~(f)の組みあわせで答えよ．なお､図中の｢物理素過程｣はその名称を具体的に記すこと｡例えば「構造 G は (iv)の電子陽電子対生成と (a)のレイリー散乱 の組み合わせ」のように答えよ．

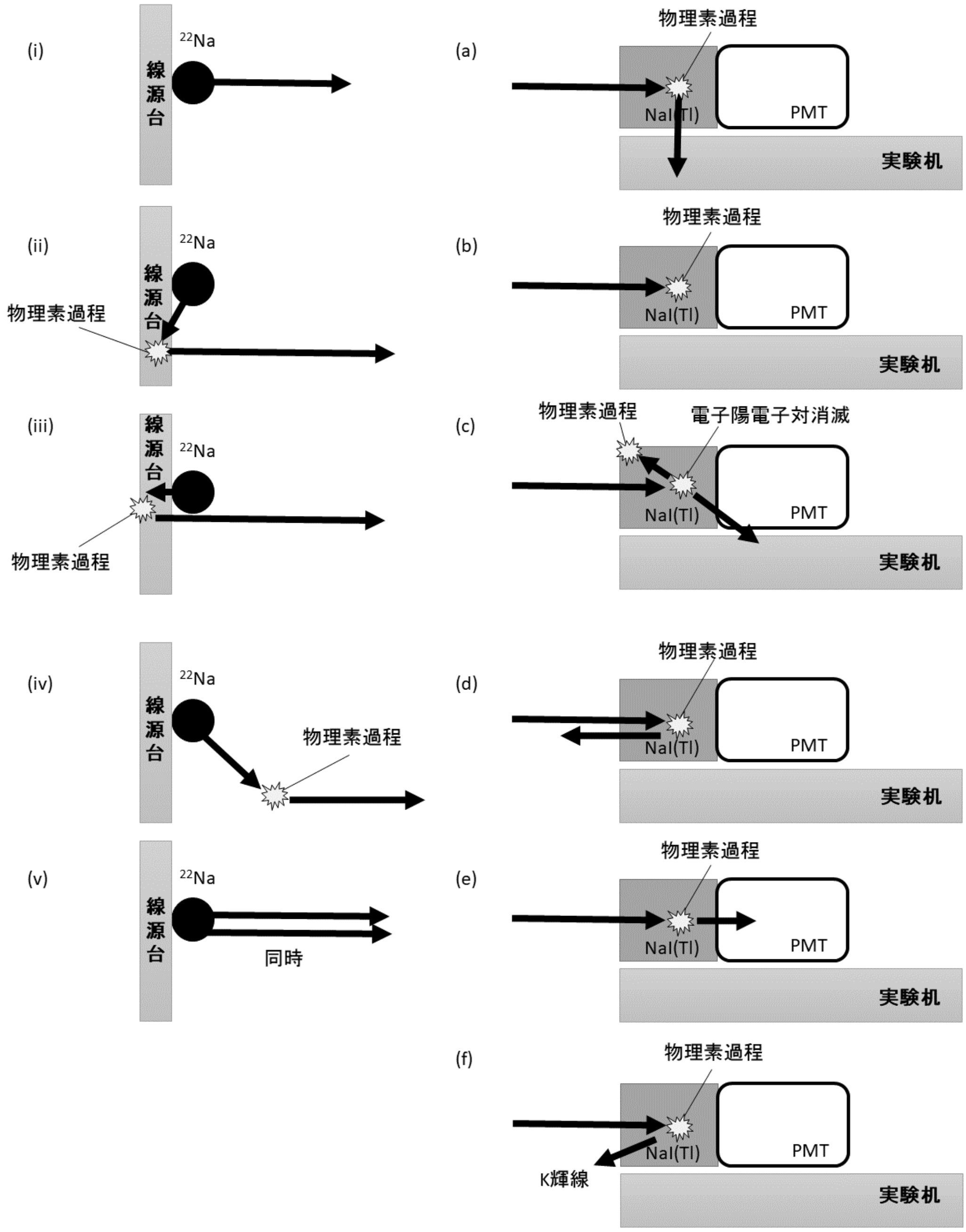


図 4

問2. **図 3** に見られる構造 A, B, C, D, E, F のエネルギー値を求めよ．ただし，Na と I の特性 K エックス線のエネルギーはそれぞれ 1.0 keV, 28.5 keV, 光速度c = 3.0 x 10^8 m/s, 電子の静止質量エネルギー m_ec^2 =511 keV, 陽子の静止質量エネルギーm_pc^2 = 938 MeV, 入射エネルギーEの光子が角度θでコンプトン散乱された後のエネルギーが $\frac{E}{1+\frac{E}{m_ec^2}(1-\cos\theta)}$ になることを用いてよい．

問3. **図 3** に見られる構造 C の分解能 σ を求めよ．ただし，σ は構造 C の標準偏差で定義されるものとし，PMT のエネルギー分解能には PMT の増幅のゆらぎは寄与しないものとする．

問4. 計測器のデッドタイムを補正した後の構造 C の計数率（**図 3** の斜線）は 100 count/sec であった．放射線源の壊変率を計算せよ．なお，NaI の光子に対する断面積は**図 5** の通りであり，光電吸収，コンプトン散乱，電子陽電子対生成の値がプロットされているので必要なものを選び用いよ．ただし，グラフから読み取る有効数字は 1 桁でかまわない．

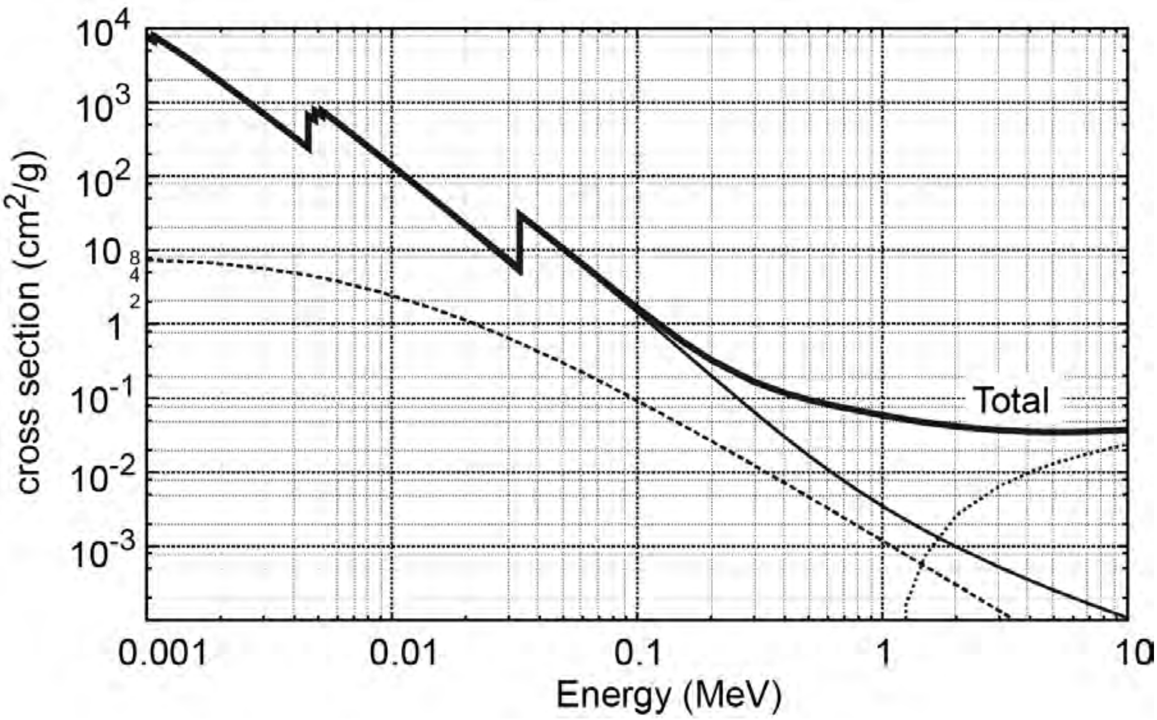


図 5

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 30 年 4 月入学試験問題

平成 29 年秋期入学試験問題

物　理　学　II

2017 年 9 月 7 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は１から２まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題１・２は，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙 2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （７５点）

電磁場中の質量m，電荷qの荷電粒子の量子力学的ハミルトニアンは

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-q\mathbf{A}\right)^2+q\varphi$$

で与えられることが知られている。ここで，$\hat{\mathbf{p}}$は粒子の運動量演算子，$\mathbf{A}$はベクトルポテンシャル，φはスカラーポテンシャルである。今，z軸方向を向く，時間によらない一様な磁場$\mathbf{B}=\left(0,0,B\right)$のみが存在するとする。以下の解答にあたっては，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$（$h$はプランク定数）を用いて良い。

（問１）$\mathbf{A}=\left(0,Bx,0\right)$とすれば，$z$軸方向に一様な磁場（大きさ$B$）を表すことを示せ。

以下では上述のようにベクトルポテンシャルを取る。

（問２）ハミルトニアン$\hat{H}$とy,z方向の運動量演算子$\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$が可換であることを示せ。

（問３）（問２）よりy,z方向の運動量は運動の定数となるので、$\hat{p}_y=p_y$, $\hat{p}_z=p_z$とおける。このときハミルトニアンが$\hat{H}=\hat{H}_X+\dfrac{1}{2m}p_z^2$と書けることを示せ。ただし，$\hat{H}_X=\dfrac{\hat{p}_X^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2X^2$であり，$X=x-\dfrac{p_y}{qB}$とおいた。また$\omega$を与えよ。

（問４）$\hat{H}_X=\dfrac{\hat{p}_X^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2X^2$の固有関数を求めるため消滅・生成演算子を

$\hat{a}=\alpha X+i\beta\hat{p}_X$，$\hat{a}^\dagger=\alpha X-i\beta\hat{p}_X$とする（$\alpha,\beta$は正の実数）。

$\hat{H}_X=\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$，$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1$となるように$\alpha,\beta$を定めよ。

（問５）$\hat{H}_X$の固有状態は$\left|n\right\rangle=\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\left|0\right\rangle$と表されることを示せ。また，（問３）の$\omega$を用いて$\hat{H}_X$の固有値$E_n$を求めよ。$\left|0\right\rangle$は$\hat{a}\left|0\right\rangle=0$で定義される状態である。

（問６）（問３）のハミルトニアン$\hat{H}$の固有値をE_n，固有関数を$\varphi_n\left(X\right)$を用いて表せ。

ただし$\varphi_n\left(X\right)$は$\left|n\right\rangle$のX座標表示である。

$\boxed{2}$ (75 点)

3 次元の理想ボーズ気体について次の問に答えよ。ただし，粒子の質量を m，粒子数を N，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h，$\hbar = h/(2\pi)$ とし，スピンは持たないものとする。必要なら，リーマンの ζ 関数の積分表示

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

およびガンマ関数の値 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。ただし，(問 2) iii 以外では $\zeta(z)$ の具体的な値は代入しなくてよい。

(問 1) ポテンシャルがなく，一辺 L の立方体の空間に閉じ込められた理想ボーズ気体を考える。$L^3 = V$ と書いてよい。iii，iv については，結果は N，k_{B}，T_{c}，T の内必要なものを用いて表せ。

i. 1 粒子エネルギーを ϵ として，単位体積あたりの 1 粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。

ii. ボーズ・アインシュタイン凝縮の臨界温度 T_{c} を求めよ。

iii. 温度 $T < T_{\mathrm{c}}$ で，$\epsilon = 0$ の 1 粒子状態に落ち込んでいる粒子の数 N_0 を求め，その温度依存性の概略を図示せよ。

iv. 温度 $T < T_{\mathrm{c}}$ での，定積熱容量 C_V を求め，その温度依存性の概略を図示せよ。

(問 2) 現在では原子とレーザー光の相互作用を利用して，種々の原子気体を μK オーダーの極低温に冷却することができる。このような系では，原子気体は 3 次元の調和ポテンシャル

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

によって空間的に閉じこめられている。このとき， 1 粒子のエネルギー準位 $\epsilon(n_x, n_y, n_z)$ は n_x，n_y，n_z を非負の整数として

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right)$$

で与えられる。この場合について以下の問いに答えよ。ただし，$\hbar\omega \ll k_{\mathrm{B}}T$ とし，n_x，n_y，n_z についての和を積分に直してよい。

i. 1 粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。

ii. ボーズ・アインシュタイン凝縮の臨界温度 T_{c} を求めよ。

iii. $\omega = 2\pi\nu$，$\nu = 140\mathrm{Hz}$ のとき，$T_{\mathrm{c}} = 6.6 \times 10^{-1} \mu\mathrm{K}$ になるためには，何個の原子を閉じ込める必要があるか。必要なら $\zeta(3/2) \simeq 2.6$，$\zeta(2) \simeq 1.6$，$\zeta(5/2) \simeq 1.3$，$\zeta(3) \simeq 1.2$，$\zeta(4) \simeq 1.1$，$k_{\mathrm{B}} \simeq 1.4 \times 10^{-23}$ J K^{-1}，$h \simeq 6.6 \times 10^{-34}$Js を利用せよ。