埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

令和２年４月入学試験問題

令和元年秋期入学試験問題

物　理　学　I

2019 年 9 月 5 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙４枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は①から③まで３問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題①，問題②，問題③問１，問題③問２を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙４枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （50 点）

中心力ポテンシャル V の中の質量 m の粒子の運動を考える。粒子は力の中心を含む 1 つの平面上を運動するので, 力の中心を原点とする平面極座標を使って, 時刻 t における粒子の位置を $(r(t), \phi(t))$ と表す。ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \tag{1}$$

と書ける。ここで, ドットは時間微分を表す。

問 1 r と ϕ に対する運動方程式を求めよ。

問 2 角運動量 $M = mr^2\dot{\phi}$ が保存することを示せ。

関数 $r = r(t)$ と $\phi = \phi(t)$ から t を消去すると, 粒子の軌道を表す関数 $r = r(\phi)$ が得られる。さらに, $u(\phi) = \dfrac{1}{r(\phi)}$ とおく。

問 3 角運動量 M が与えられたとき, $\dot{\phi}(t)$ と $\ddot{r}(t)$ が $u(\phi)$ を使って

$$\dot{\phi} = \frac{M}{m}u^2, \qquad \ddot{r} = -\frac{M^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} \tag{2}$$

と表されることを示せ。

以下では, ポテンシャルが

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{\lambda}{2r^2} \tag{3}$$

の場合を考える。ここで, k と λ は定数で, $k > 0$ とする。また, 角運動量は $M^2 > m\lambda$ を満たすとする。

問 4 角運動量 M が与えられたとき, **問 1** で求めた運動方程式から, 関数 $u(\phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。

問 5 この場合の粒子の軌道は, 定数 ℓ, ϵ, α を使って,

$$u(\phi) = \frac{1}{\ell}\left[\,1 + \epsilon\cos(\alpha\phi)\,\right] \tag{4}$$

と書ける。**問 4** で求めた方程式を使って, 定数 α を, m, k, λ, M のうち必要なものを使って表せ。

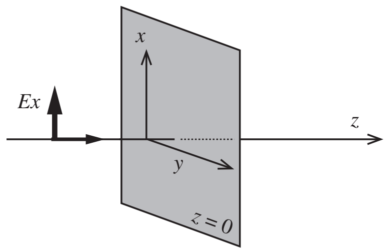
問 6 $0 < \epsilon < 1$, $\lambda = 0$ のとき, 軌道は楕円になる。$0 < \epsilon < 1$ で, λ がゼロでない十分小さい値のときは, 軌道は楕円に近い形になるが, その近日点 (r の値が最小になる点) の方向が時間とともに変化する。粒子が軌道を 1 周するごとに近日点の方向がどれだけの角度変わるかを求めよ。

2 （50 点）

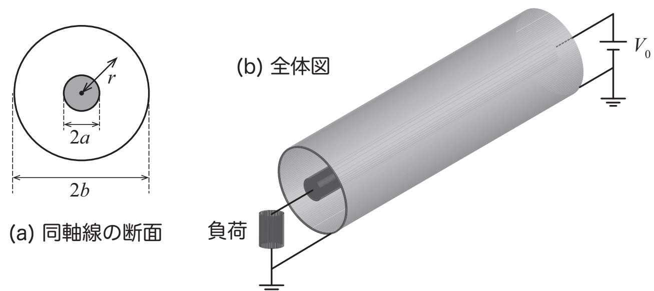
問 1 電流密度，電荷密度のない真空中のマクスウェル方程式を電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を使って記せ。誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0 とする。

問 2 問 1 のマクスウェル方程式を変形して，電場 $\boldsymbol{E}$ もしくは磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が波動方程式を満たすことを示せ。

問 3 下図のように，平面波の電磁波が完全導体の平面に垂直に入射したとき，入射波と反射波が干渉し定常波を作る。電場の節の位置を求めよ。図のように導体表面を $z=0$ とし，入射波の電場は振幅 A，角振動数 ω，光速 c として，$E_x(z,t)=A\sin\omega(t-z/c)$ としてよい。また，同様に磁束密度の節の位置を求めよ。



下図 (a), (b) のように，外側の円筒導体（内径 $2b$）と内側の中心導体（外径 $2a$）からなる長い同軸線がある。同軸線の一端に電源（電圧 V_0），他端に負荷の抵抗がつながっており，一定の電流 I_0 が流れている。外側導体と中心導体の間は真空であり，導体の抵抗はないものとして以下の問いに答えよ。



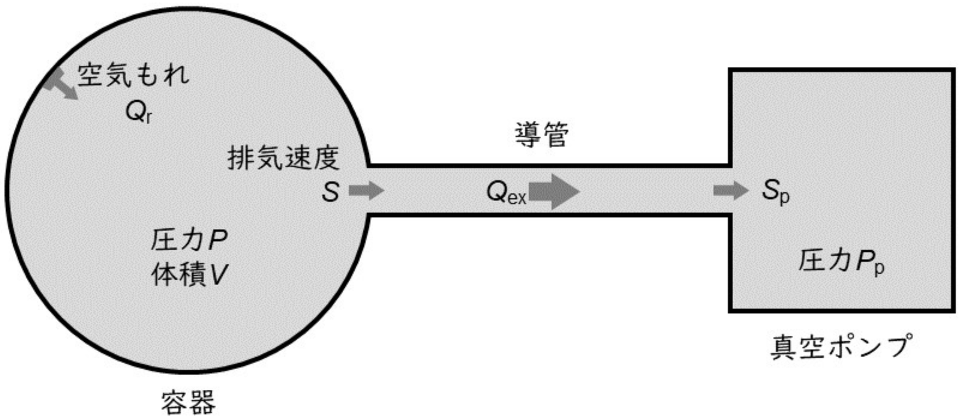
問 4 同軸線の中心軸からの距離を r とする。導体間の隙間（$a<r<b$）に生じる静電場 $\boldsymbol{E}$ と静磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ。

問 5 問 4 で得られた磁束密度 $\boldsymbol{B}$（磁束線）と電場 $\boldsymbol{E}$（電気力線）を同軸線の断面に図示せよ。ただし，電流 I_0 の向きを明記すること。

問 6 導体間の隙間（$a<r<b$）に蓄えられる単位長さあたりの静電場と静磁場のエネルギーを求めよ。

3 （50 点）

問 1 下図のように, 体積 V の容器を導管で真空ポンプと接続し, 容器内の気体を排気する事を考える。気体の排気速度は, 単位時間あたりに排気される気体の体積で定義され, 容器の出口, すなわち導管の入口での排気速度を S, 真空ポンプが排気できる排気速度を S_{p} とする。排気される気体の密度を ρ とすると, 単位時間に流れる質量は $S\rho$ となり、気体の状態方程式から $Q_{\mathrm{ex}} \equiv SP$ に比例することが分かる。この量は実験的に測定しやすい物理量の積であるため, 一般に, 容器からの排気量として Q_{ex} が用いられる。容器および真空ポンプの圧力をそれぞれ P, P_{p} とすると, Q_{ex} は導管の入口と出口における圧力差に比例し, コンダクタンス G を用いて $Q_{\mathrm{ex}} = G(P - P_{\mathrm{p}})$ と書けるものとする。また, Q_{ex} は導管内で一定とする。以下の問いに答えよ。



(1) G と S, S_{p} の間の関係式を, P や P_{p} を用いずに記せ。

つぎに, 容器への空気漏れの量を Q_{r} とし, 前述のように真空ポンプで排気する場合の容器内の圧力変化を考える。ただし, V は変化しないものとする。

(2) 容器内の気体の量 PV の時間変化量 $\frac{\mathrm{d}PV}{\mathrm{d}t}$ を, Q_{ex}, Q_{r} で記せ。

(3) 容器の初期圧力を P_{ini} として, 問 **1 (2)** の微分方程式を解き, 容器内の圧力 P の時間依存性を記せ。また, 最終到達圧力 P_{fin} を求めよ。

(4) 導管が太く, G が S_{p} よりもずっと大きい場合, 問 **1 (3)** で求めた P の時間依存性を, 縦軸 $\log P$, 横軸 t とした片対数グラフに示せ。また, G が S_{p} の 0.1 倍の場合も同じグラフ上に記せ。なお, 2 つの場合でそれぞれ, P_{ini}, P_{fin} が縦軸のどこに相当するか明示すること。

問 2 低温極限での絶縁体の比熱は, 定数 β と絶対温度 T を用いて βT^3 となることが知られている。1.0 K での比熱が 0.10 [J/(kg·K)] である絶縁体からなる 0.10 kg の試料 A と, 同じ絶縁体からなる 0.050 kg の試料 B を用意した。真空中で, 温度 1.0 K の試料 A と温度 $\sqrt{5}$ K の試料 B を熱接触させ充分時間が経過したところ熱平衡状態になった。ただし, $\sqrt{5}$ K は, この絶縁体にとって, 低温極限と見なせる温度であり, 試料の熱膨張は無視でき, 熱は外部には漏れないものとする。また, 答えに平方根が含まれる場合は, 必ずしも平方根を小数になおさなくてもよいが, 小数で答える場合には, 有効数字 2 桁で答えよ。

(1) 充分時間が経過し熱平衡状態になったときの温度を求めよ。

(2) この過程での, 試料 A と試料 B のエンタルピーの収支, 及び, 二つの試料全体でのエンタルピーの収支をもとめよ。ただし, 単位も明記すること。

(3) この過程での, 試料 A と試料 B のエントロピーの収支, 及び, 二つの試料全体でのエントロピーの収支をもとめよ。ただし, 単位も明記すること。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

令和２年４月入学試験問題

令和元年秋期入学試験問題

物 理 学 II

2019 年 9 月 5 日 15：00 ～ 16：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は1から2まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題1，問題2を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （75 点）

1 次元の無限に深いポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq a) \\ +\infty & (x < 0,\ x > a) \end{cases} \tag{1}$$

の中の質量 m の粒子の量子力学を考える。**問 1** から**問 5** までは, 粒子が 1 個だけ存在する場合について答えよ。

問 1 区間 $0 \leqq x \leqq a$ における波動関数 $\psi(x)$ に対するエネルギーの固有値方程式（定常状態のシュレーディンガー方程式）を書け。ただし, エネルギー固有値を E とする。また, $x = 0$ と $x = a$ において波動関数が満たすべき境界条件を書け。

問 2 区間 $0 \leqq x \leqq a$ におけるエネルギーの固有値方程式の一般解は,

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \qquad (A,\ B,\ k \text{ は定数},\ k \geqq 0) \tag{2}$$

と書ける。k を E を使って表せ。

問 3 (2) が境界条件を満たすことから, エネルギー固有値 E_n と規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

問 4 時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \right] \tag{3}$$

であるとき, 時刻 $t > 0$ における波動関数 $\psi(x, t)$ を求めよ。

問 5 ポテンシャル (1) に摂動

$$\Delta V(x) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \qquad (V_0 \text{ は定数}) \tag{4}$$

を加えたとき, 各エネルギー固有値の変化 ΔE_n を摂動の 1 次の近似で求めよ。

問 6 ポテンシャル (1) の中に 2 個の同種粒子が存在する場合を考え, 各粒子の座標を x_1, x_2 とする。この系の基底状態のエネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。2 個の粒子がフェルミ粒子である場合とボーズ粒子である場合に分けて答えよ。ただし, 波動関数のスピン自由度の部分は 2 個の粒子の入れ換えに対して対称になっているとして, 波動関数の座標に依存する部分 $\psi(x_1, x_2)$ だけを求めよ。また, 粒子間の相互作用は考慮しなくてよい。

2 （75 点）

体積 V の箱中に同じ原子からなる非磁性 2 原子分子が気体として存在している。箱の中には体積の無視できる物体が置かれており，気体分子が物体に吸着・離脱することができる。気体は相互作用のない理想気体として扱えるものとする。気体分子の質量を m，慣性モーメントを I とし，系の温度が T に保たれているとき，以下の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数 k_{B}，プランク定数 h，逆温度 $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ とする。必要であれば公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$ を用いてよい。

問 1 分子の重心位置座標を (x, y, z)，回転対称軸の天頂角，方位角を θ, ϕ とし，それらの共役運動量を $p_x, p_y, p_z, p_\theta, p_\phi$ とする。このとき分子 1 個に対するハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I \sin^2 \theta}$$

で与えられる。古典統計力学におけるグランドカノニカル分布の考え方に従い，大分配関数 Ξ_g が

$$\Xi_g = \exp\left[V \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2} \frac{8\pi^2 I}{\beta h^2} e^{\beta \mu_g}\right] \tag{1}$$

となることを示せ。ただし気体の化学ポテンシャルを μ_g としている。

問 2 気体の平均粒子数 N_g を求めよ。

問 3 気体の圧力 P_g を求めよ。結果は N_g を用いて表せ。

物体には分子が 1 個ずつ吸着できる箇所が N_0 個あり，分子 1 個を吸着するためにはエネルギー ε が必要となる。また，物体に吸着された分子系の化学ポテンシャルを μ_a とする。

問 4 物体に吸着された分子系の大分配関数 Ξ_a を求めよ。

問 5 平均吸着分子数 N_a を求めよ。

問 6 相平衡の条件 $\mu_g = \mu_a$ より吸着率 N_a/N_0 を求め，結果を気体の圧力 P_g を用いて表せ。また，吸着率の圧力依存性も図示せよ。