埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物質科学専攻 物理学 PG

令和４年４月入学試験問題

物　理　学　I

2021 年 9 月 11 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙３枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は①から③まで３問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題①，問題②，問題③を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。答案用紙の裏面も使用する場合は，表面右下に「裏に続く」と記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙３枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （50 点）

1 次元系のある平衡点にて, 復元力が働く質量 m の質点の振動運動を考える。復元力 F は平衡点からの変位 $x(t)$ に比例するとし $(F(t) = -kx(t))$, 比例係数 k は正の定数とする。$x(t)$ の時間の一階微分を $\dot{x}(t)$, 二階微分を $\ddot{x}(t)$ と書くとする。

問 1 この系のラグランジアン L を $x, \dot{x}, k, m$ を使用して求め, オイラー・ラグランジュ方程式から質点の運動方程式を求めよ。

問 2 **問 1** で得られた運動方程式に $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ を導入し書き換え, 初期条件を $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ とし, 解を求めよ (ただし, A は正の実数)。

問 3 この系の全力学的エネルギー E を $p \equiv m\dot{x}$ を導入して x, p, m, ω_0 で表せ。このとき, 位相空間 (xp 面) にて運動の軌跡を図示せよ。x, p 軸との交点の時刻と交点の x, p の値を E を用いて記せ。

問 3 で得られた運動の軌跡を用いて, 前期量子論で扱われたゾンマーフェルトの量子化条件を適用し, 系の全エネルギー E を整数 n 及びプランク定数 h で表すことを考える。一般化座標 q, 一般化運動量 p を使って以下を満たすことが量子化条件である。

$$\oint p \, dq = nh$$

左辺の積分値は qp 平面における軌跡を表す閉曲線で囲まれた面積を意味する。

問 4 ゾンマーフェルトの量子化条件を用いると, $E = n\hbar\omega_0$ と書けることを示せ。ただし, $\hbar = h/2\pi$ とする。必要であれば長軸半径, 短軸半径が α, β の楕円の面積が $\pi\alpha\beta$ となることを用いよ。

次にこの系に速度に比例した抵抗力が加えられた場合を考える。**問 1** で得られた運動方程式に抵抗力 $-b\dot{x}(t)$ を加える。比例係数 b は正の定数とし, $b/m = 2\gamma$ と書けるとして以下の問いに答えよ。(ただし, $\gamma < \omega_0$ とする。)

問 5 抵抗力を加えた運動方程式を $x, \dot{x}, \omega_0, \gamma$ を用いて表し, 初期条件を $x(0) = B$, $\dot{x}(0) = 0$ とし, 解を求めよ (ただし, B は正の実数)。

問 6 この減衰する振動子の軌跡を xp 面で考慮したとき, x 軸との交点の時刻を $t_0(=0), t_1, t_2, \ldots$ と書くとする。$x(t_0)$ と $x(t_2)$ を比べ, 振動子が失う力学的エネルギーを示せ。

2 (50点)

A) **図 1** のように, 真空中に, $+q$ と $-q$ の電荷が, 原点 O を中心に z 方向に微小距離 d だけ離れた配置にあるとする。電荷 $-q$ の位置から $+q$ の位置へのベクトルを $\vec{d}$, 真空の誘電率を ε_0 とする。以下の**問 1** に答えよ。なお, 微小量 d は一次の項まで展開せよ。

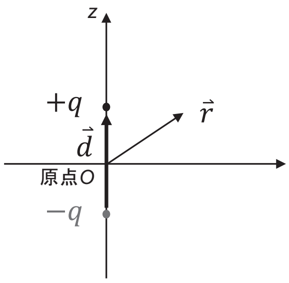


図 1:

問 1 原点 O から距離 r だけ離れた位置 $\vec{r}$ における電位 $\phi(\vec{r})$ と電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ。

B) 次に, **図 2** のように, 半径 a の二つ球の内部が, それぞれ一様に電荷密度 $-\rho$, $+\rho$ で満たされおり, これらの球の中心が, z 方向に原点 O を中心に微小距離 d だけずれて重なっている。球面上の位置を極座標で表したときの天頂角を θ, 負の球から正の球のそれぞれの中心位置のずれを $\vec{d}$ とする。以下の**問 2**, **問 3** に答えよ。

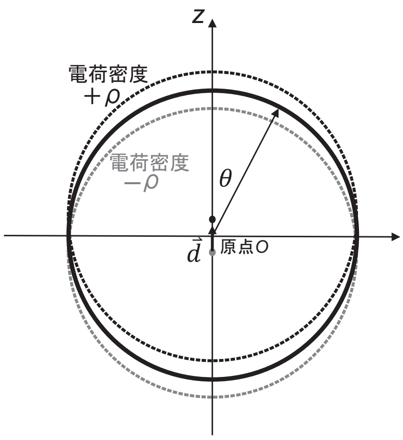


図 2:

問 2 位置 θ の球面に現れる電荷の面密度を求めよ。

問 3 球の外側にできる電場を求めよ。

C-1) さらに, **図 3** のように, 上記とは別の半径 a の球面上に, 面密度 σ で電荷が一様に分布しており, z 軸を中心に角速度 ω で自転しているとする。真空の透磁率を μ_0, z 軸の単位ベクトルを $\vec{n}$ として, 以下の**問 4**, **問 5** に答えよ。

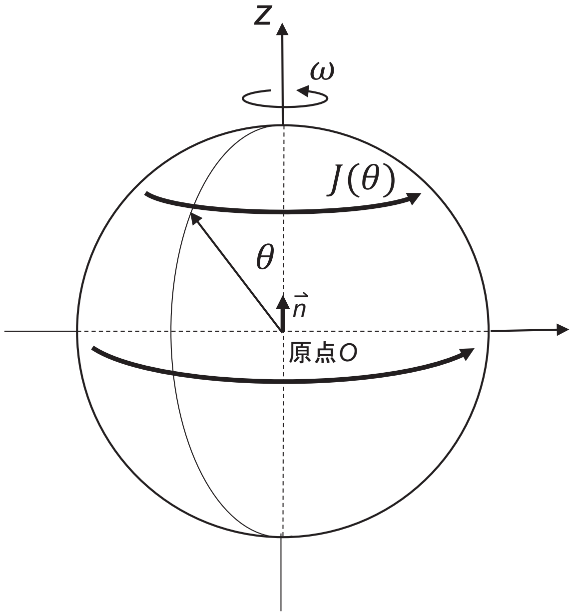


図 3:

問 4 球の回転で生じる環状電流の, 天頂角 θ における電流密度 $J(\theta)$ を求めよ。

問 5 この環状電流により発生する磁気モーメントの大きさと方向を求めよ。

C-2) 最後に**図 3** と同じ帯電球が, 球の外側の位置 $\vec{r}$ に作る磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を導出する。以下の**問 6**, **問 7** に答えよ。

まず, **図 3** で定義された天頂角 θ における電流密度 $J(\theta)$ の環状電流は, **図 4** のように $d\theta$ を定義すると, 厚み dz の円柱の側面に, z 方向の単位長さあたり J_0 の一様電流が流れている状況と読み替えることができる。

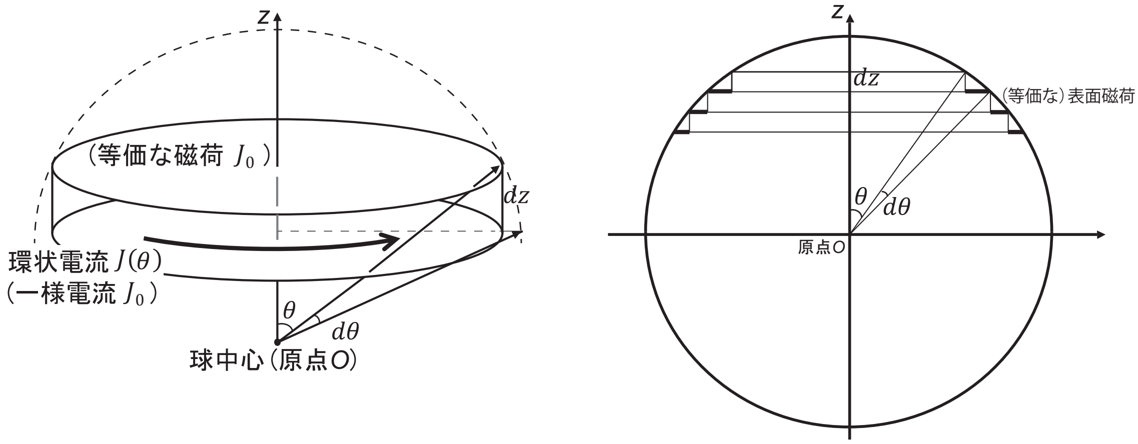


図 4:

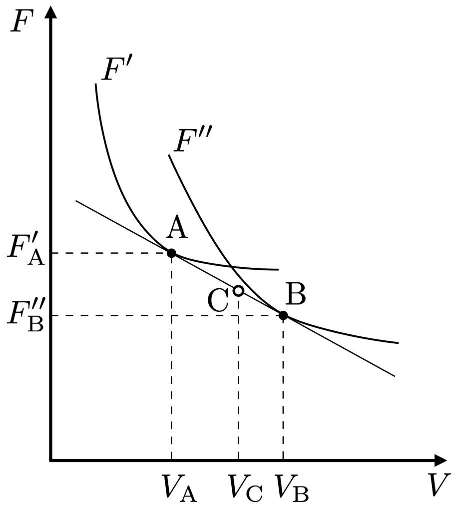
問 6 dz, J_0 を, それぞれ, a, θ, $d\theta$, σ, ω のうち必要なものを用いて表せ。

次に、(上記で読み替えた) z 方向に単位長さあたり J_0 の一様な環状電流が作り出す磁気モーメントは, **図 4 左**の円柱の上面と下面に, それぞれ $\pm J_0$ の面密度を持つ磁荷がつくるものと等価と考えることができる。

問 7 このとき, **図 4 右**のように球面上に表れる等価な磁荷の分布を考え, **問 2**, **問 3** との類似性を用いて, $\vec{B}(\vec{r})$ を求めよ。なお解答は μ_0, J_0, a, r, $\vec{r}$, $\vec{n}$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$ (50点)

一種類の物質からなる粒子数が保存した系について, Helmholtz の自由エネルギー F が温度 T において相 1 ならびに相 2 のそれぞれについて分かっているとする。相 1 にあるときの Helmholtz の自由エネルギーを $F' = F'(T, V)$, 相 2 にあるときのそれを $F'' = F''(T, V)$ で表す。T を共通の一定値に保ち, F' と F'' を体積 V の関数として表したグラフは下記のようになる。解答でエントロピーを表す記号は S を用い, 以下の**問 1〜5** に答えよ。



問 1 内部エネルギー U の微小変化 dU に関する熱力学の基礎方程式から, Legendre 変換を用いて, dF の表式を適切な独立変数がわかる形式で示せ。

問 2 温度 T が一定である条件下での, 圧力 p と Helmholtz の自由エネルギー F の関係を示せ。

問 3 図中の A と B における圧力をそれぞれ p_{A}, p_{B} とおいて, 直線 AB が F', F'' の共通接線であることを利用し, A と B における Gibbs の自由エネルギー G が等しいことを示せ。

問 4 前問の結果を用い, A と B が 2 相間の相転移を与えることを説明せよ。

問 5 図中の体積が V_{C} となる共通接線上の状態 C において, 相 1 および相 2 がどのような状態をとることが安定となるか説明せよ。

Ehrenfest は Gibbs の自由エネルギーの n 次微分が不連続になるものを, n 次相転移と定義した。つまり, n 次相転移の場合は $n-1$ 次微分までは連続である。一種類の物質からなる系の相 1 と相 2 の境界が 2 次相転移であるとき, 以下の**問 6** に答えよ。

問 6 相平衡を維持しながら温度 T と圧力 p を変えるとき, 以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\frac{dp}{dT} = \frac{C'_p - C''_p}{TV(\beta' - \beta'')} \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\beta' - \beta''}{\kappa'_T - \kappa''_T} \tag{2}$$

ここで, C_p は定圧比熱, $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ は熱膨張率, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ は等温圧縮率である。それぞれのプライム $(')$ とダブルプライム $('')$ は相 1 と相 2 における物理量であることを示している。

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物質科学専攻 物理学PG

令和4年4月入学試験問題

物　理　学　II

2021年9月11日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は①から②まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題①，問題②を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。答案用紙の裏面も使用する場合は，表面右下に「裏に続く」と記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （75 点）

2 つの規格化された状態 $|+\rangle$, $|-\rangle$ をもつ量子力学系を考える。これらの状態は, ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の同じ固有値 E_0 の固有状態であり,

$$\hat{H}_0 |+\rangle = E_0 |+\rangle, \qquad \hat{H}_0 |-\rangle = E_0 |-\rangle \tag{1}$$

を満たす。また, これらの状態は, あるエルミート演算子 $\hat{Q}$ の固有状態でもあり,

$$\hat{Q} |+\rangle = + |+\rangle, \qquad \hat{Q} |-\rangle = - |-\rangle \tag{2}$$

のように, その固有値で 2 つの状態が区別される。以下の問では, この 2 つの状態以外の状態を考慮する必要はないものとする。

問 1 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ が直交すること $\langle -|+\rangle = 0$ を示せ。

次に, 摂動 $\hat{H}_1$ を加えた新しいハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \tag{3}$$

をもつ量子力学系を考える。$|+\rangle$, $|-\rangle$ に対する摂動の作用は,

$$\hat{H}_1 |+\rangle = \Delta |-\rangle, \qquad \hat{H}_1 |-\rangle = \Delta |+\rangle \tag{4}$$

によって与えられる。ここで, Δ は正の実数である。

問 2 演算子 $\hat{Q}$ とハミルトニアン $\hat{H}$ が交換しないこと $\hat{H}\hat{Q} \neq \hat{Q}\hat{H}$ を示せ。また, このことが何を意味するかを簡単に述べよ。

問 3 $\hat{H}$ の固有値 E_1, E_2 $(E_1 < E_2)$ を求め, それぞれの固有値に対応する規格化された固有状態 $|1\rangle$, $|2\rangle$ を $|+\rangle$, $|-\rangle$ を使って表せ。

問 4 時刻 t における系の状態を $|\psi(t)\rangle$ とすると, $|\psi(t)\rangle$ はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \tag{5}$$

を満たす。$|\psi(t)\rangle$ を, $|1\rangle$, $|2\rangle$ の線形結合の形

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle \tag{6}$$

で表すとき, 係数関数 $c_1(t)$, $c_2(t)$ を求めよ。ただし, 時刻 $t = 0$ における初期状態を,

$$|\psi(0)\rangle = a |1\rangle + b |2\rangle \qquad (a,\ b \text{ は複素定数}) \tag{7}$$

とする。

問 5 時刻 $t = 0$ における初期状態が $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ の場合に, $|\psi(t)\rangle$ を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の線形結合として表わせ。

問 6 **問 5** の場合に, 時刻 t で状態が $|+\rangle$ にある確率 $P_+(t)$ を求めよ。

問 7 **問 5** の場合に, 時刻 t における演算子 $\hat{Q}$ の期待値 $\langle\psi(t)|\,\hat{Q}\,|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

$\boxed{2}$ （75 点）

環状に並んだ N 個のイジングスピンからなる系を考える。i 番目のイジングスピン σ_i は, $+1$ もしくは -1 の値をとる。この系のハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

と与えられているとする (J は正の定数, $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$, h は磁場の大きさを表す定数)。

問 1 分配関数 Z を以下の形で表したとき, 2×2 対称行列 $V(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ の具体的な形を書け。ただし, k_{B} はボルツマン定数, T は絶対温度, $1/\beta = k_{\mathrm{B}}T$ である。

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta\mathcal{H}} = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1} V(\sigma_1, \sigma_2)V(\sigma_2, \sigma_3)\cdots V(\sigma_N, \sigma_{N+1}).$$

問 2 行列 V の固有値 λ_0, λ_1 を求めよ。 ただし, $\lambda_0 > \lambda_1$ とする。

問 3 スピン 1 個あたりの自由エネルギー f を前問で求めた固有値を用いて書け。なお, $N \gg 1$ とし, 固有値の具体的な形を代入しなくてよい。

問 4 ここで, スピンの平均値 $\langle\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\rangle/N$ をスピン 1 個あたりの自由エネルギー f を用いて表せ。

問 5 前問の結果を利用し, ゼロ磁場における帯磁率

$$\chi = \lim_{h\to 0} N^{-1}h^{-1}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right\rangle$$

を T と J の関数として求めよ。

問 6 以降 $h = 0$ とする。2 点スピン相関関数は,

$$\langle\sigma_i\sigma_j\rangle = Z^{-1}\sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}\sigma_i\sigma_j e^{-\beta\mathcal{H}}$$

と定義される ($i < j$)。$N \gg |i-j|$ のとき, $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle = (\tanh(\beta J))^{|i-j|}$ であることを示せ。その際, ある 2×2 行列 S を用いて,

$$\sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}\sigma_i\sigma_j e^{-\beta\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}[V^{i-1}SV^{j-i}SV^{N-j+1}]$$

と書けることを, S の行列要素を求めた上で用いてよい。