

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物質科学専攻 物理学 PG

令和 6 年 4 月入学試験問題

令和 5 年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2023 年 9 月 5 日 13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は㊶から㊸まで 3 問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題㊶, 問題㊷, 問題㊸を, それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して, 問題が小問に分かれている場合には, 小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に, 枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には, 手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は, 解答の有無にかかわらず, 答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

(50 点)

地球を楕円軌道で周回する人工衛星の運動を考える。地球の質量を M 、人工衛星の質量を m 、万有引力定数を G として、以下の問いに答えよ。なお、人工衛星の質量は地球の質量に比べてずっと小さいため、地球の中心を座標の原点に固定できる。また、人工衛星は質点と考えてよいものとする。

問 1 原点から測った人工衛星の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすれば、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を地球と人工衛星の間に働く力として、人工衛星の運動方程式は $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ と書ける。このとき、原点周りの角運動量が保存することを示せ。

問 2 人工衛星と地球を結んだ線が単位時間に描く図形の面積 (面積速度) を極座標の動径成分 r 、方位角成分 θ を用いて示せ。

問 3 **問 1** で求めた角運動量の保存則から、中心力のもとでは面積速度が一定になること (ケプラーの第 2 法則) を示せ。必要に応じ、極座標の単位ベクトルの関係式 $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$ を用いて良い。

問 4 人工衛星の軌道が離心率 e の楕円するとき、近地点と遠地点での人工衛星の速さの比を求めよ。但し、 $e = \text{焦点間の距離} \div \text{長径}$ とする。

問 5 (衛星の周期)² が (軌道長半径)³ に比例することを示せ。

問 6 **問 5** の結果を用いて、国際宇宙ステーションの軌道情報 (軌道高度 400 km, 軌道周期 90 分), 及び地球半径 6400 km, $2^{8/3} \approx 6.4$ を用い、地球を周回する静止衛星の軌道高度を求めよ。

2

(50 点)

(I) 以下の問に答えよ。

問 1 微分可能な任意のベクトル $\mathbf{A}$ に対して、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ が成り立つことを示せ。

問 2 任意の電荷密度と電流密度に対する真空中のマクスウェル方程式を微分形と積分形でそれぞれ記せ。記号は各自で定義すること。

問 3 **問 2** の微分形マクスウェル方程式において、電荷密度と電流密度を 0 として変形を行い、電場と磁束密度が波動方程式を満たすことを示せ。

(II) 図 1 に示すように、半径 a の球体に電荷 $+Q$ が一様な電荷密度で分布している。その外側に電荷 $-Q$ に帯電した、半径 b の十分に薄い金属の球殻がある系を考える。真空の誘電率を ϵ_0 とする。

問 4 中心からの距離 r の関数として、電場の大きさを求めよ。

問 5 静電ポテンシャルを求めよ。ただし無限遠を基準にとる。また、球体と球殻間の電気容量を求めよ。

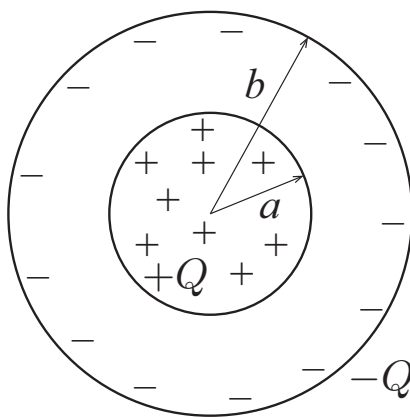


図 1

(III) 図2のように，一辺の長さ $L = 1 \text{ m}$ の正方形の領域に紙面に垂直に磁束密度が存在するとする。この領域に運動エネルギー $E = 45 \text{ MeV}$ を持つ陽子を垂直に入射し，進行方向に対して 30° 偏向させる。陽子の静止質量エネルギーを $mc^2 = 1000 \text{ MeV}$ ，光速を $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。問6と問7は数値で答えよ。

問6 陽子の運動量 p (MeV/c) と図中の曲率半径 R (m) を求めよ。

問7 運動量，磁束密度，および曲率半径の間に成り立つ関係式を求め，陽子を図2の向きに 30° 偏向させるために必要な磁束密度 B (T) の大きさと向きを答えよ。

問8 この正方形の領域の磁束密度は電磁石で作られているとする。この磁束密度を測定する場合，どのような方法があるか説明せよ。

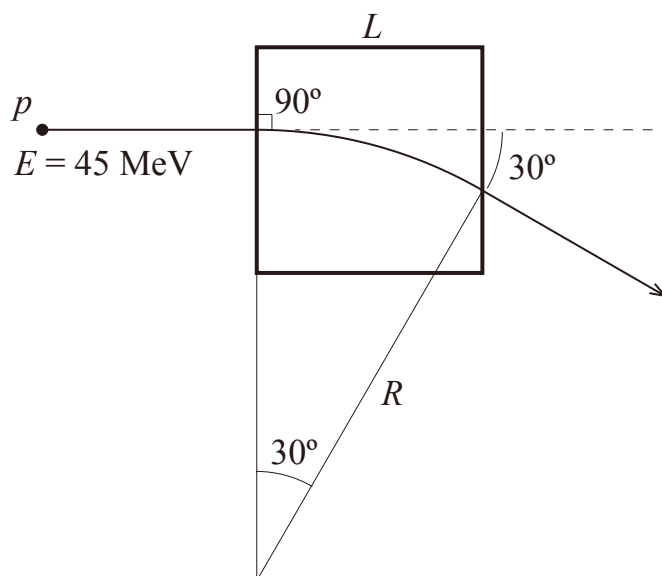


図2

3

(50 点)

(I) 気体を真空中に膨張させる自由膨張過程について、以下の問に答えよ。

問 1 断熱壁に囲まれた体積 V_1 の容器 1 に温度 T の理想気体が n モル入っており、同じく断熱壁に囲まれた体積 V_2 の真空状態の容器 2 と閉じられた栓を介して繋がっている。今、栓を開けて気体を断熱的に容器 2 中へ膨張させる。この自由膨張過程は十分にゆっくりと行われ、容器 1 および容器 2 の気体は圧力が異なるそれぞれの熱平衡状態を保ちながら変化するものとする。そして、最終的には圧力も等しくなった熱平衡状態に達する。

- (a) この過程は等温変化となる。その理由を記せ。
- (b) 始状態と終状態のエントロピー変化 ΔS を求めよ。
- (c) 得られた (b) の結果から、この過程が不可逆であることを示せ。
- (d) 最終的な熱平衡状態に達する途中の状態において、容器 2 に x モルの気体があるときの容器全体のエントロピー変化を ΔS_{mid} とし、 ΔS_{mid} が最大となる x の条件を ΔS_{mid} の 1 階微分と 2 階微分を計算することによって求めよ。

問 2 理想気体ではない気体が自由断熱膨張をするときは、一概に等温変化とはならない。まず、温度 T 、圧力 P 、体積 V 、内部エネルギー U 、定積比熱 C_V を用いて、
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{1}{C_V} \left\{ P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \right\}$$
と表せることを示せ。次に、実在気体の理想気体からのずれを説明するため提案されたファンデルワールス状態方程式を上式に適用し、 $C_V > 0$ の場合の温度変化について説明せよ。

(II) 2 種類の理想気体の混合について、以下の問に答えよ。

問 3 図 1 に示すように同じ温度 T 、同じ圧力 P の 2 種類の理想気体が体積 V の容器内部で壁によって分けられている。一方は体積 V_1 で n_1 モルの理想気体 1 が、もう一方は体積 V_2 で n_2 モルの理想気体 2 が入っている。この仕切の壁を取り除くと、両方の気体は混合し熱平衡状態に達する。この過程は不可逆変化であるが、図 2 のような準静的過程に置き換えて、この混合によるエントロピー変化 ΔS を導出せよ。半透壁 (図中では点線で表示) とは、気体 1 が入っている方は気体 2 は自由に通すが気体 1 は通さず、気体 2 が入っている方は気体 1 は自由に通すが気体 2 は通さない性質を持った壁のことを指す。

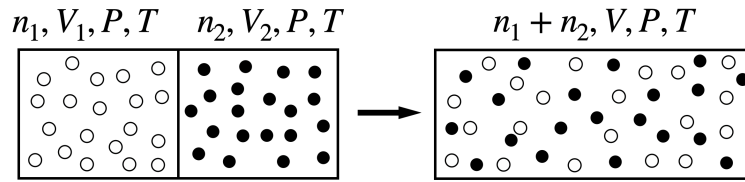
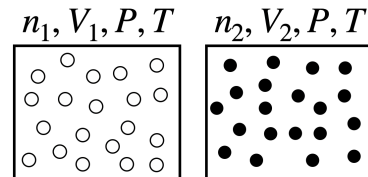
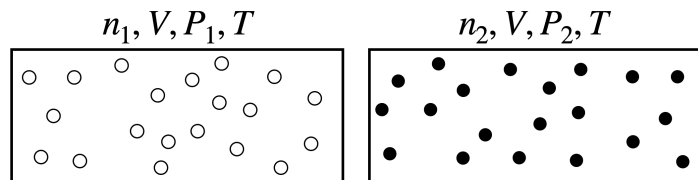


図 1

① 混合前と等価な状態



② 理想気体1と2が可逆的に体積 V まで等温膨張



③ 双方の壁の片側を半透壁にして可逆的に混合

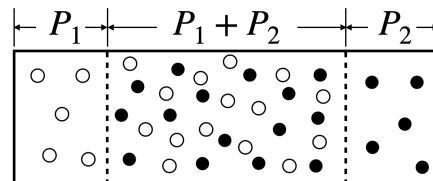


図 2

(III) 2つの物体の熱伝導について、以下の問に答えよ。

問 4 熱容量 C_1, C_2 の2つの物体がそれぞれ温度 T_1, T_2 の熱平衡状態にある。この2つの物体を接触させて、新たな熱平衡状態に達した。この過程は断熱状態で行われるものとする。

(a) 接触後の熱平衡状態の温度 T_f を求めよ。

(b) 簡単のため $C_1 = C_2 = C$ として、このエントロピー変化 ΔS は正となり、増加することを示せ。