埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　物質科学専攻　物理学PG

令和６年４月入学試験問題

令和５年秋期入学試験問題

# 物　理　学　II

2023年９月５日　15:00 ～ 16:30

**注 意 事 項**

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は1から2まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題1，問題2を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （75 点）

1 次元空間において，時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\,\psi(x), \qquad \hbar\equiv\frac{h}{2\pi}$$

に従う 1 粒子 (質量 $m$, エネルギー $E$) の波動関数 $\psi(x)$ を考える。$h$ はプランク定数とし，ポテンシャル $V(x)$ は実数とする。

**問 1** ポテンシャル $V(x)$ が束縛状態を許すとする。1 次元において束縛状態には縮退がないことを示せ。

**問 2** ポテンシャルが左右対称

$$V(x)=V(-x)$$

の場合，束縛状態の固有関数はパリティの正負で分類できることを示せ。

次に，ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x)=V_0\,\delta(x) \qquad V_0\ :\ \text{実数}$$

のようにデルタ関数 $\delta(x)$ で与えられたとする。

まず，$V_0>0$ の場合を考える。

**問 3** $x<0$ から粒子をエネルギー $E>0$, 波数 $k$ で入射させ，散乱状態を考える。入射波，反射波，透過波の波動関数の接続条件を求めよ。

**問 4** **問 3** の結果を用いて，反射率と透過率を求めよ。また，$E\to\infty$ の極限で反射率と透過率はどうなるか。

次に，$V_0<0$ の場合を考える。

**問 5** 同様に，$E>0$ として，反射率と透過率を求めよ。

**問 6** $V_0<0$ の場合には束縛状態が存在する。すべての束縛状態のエネルギーと規格化された波動関数を求めよ。

$\boxed{2}$ (75 点)

一辺 $L$ の 3 次元立方体中における，相互作用しない質量 $m$ の量子力学的粒子の統計力学を考える。ただし簡単のため，粒子のスピン自由度は考えない（スピンの縮重度は 1 とする)。以下ではグランドカノニカル分布に基づいて考えるものとし，化学ポテンシャルを $\mu$ とする。また，温度を $T$，ボルツマン定数を $k_{\mathrm{B}}$ とする。必要ならば次の数学公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(\tfrac{3}{2}),\quad \int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^x-1} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\zeta(\tfrac{5}{2})$$

を用いて良い。ここで $\zeta(\frac{3}{2}) \cong 2.61$，$\zeta(\frac{5}{2}) \cong 1.34$ である。

**問 1** 1 粒子状態 $\alpha$ のエネルギー準位を $\varepsilon_\alpha(\geqq 0)$ とすると，大分配関数は $\Xi = \prod_\alpha \sum_{n_\alpha=0}^{M} e^{(\mu-\varepsilon_\alpha)n_\alpha/k_{\mathrm{B}}T}$ と書ける。フェルミ粒子 $(M=1)$ およびボーズ粒子 $(M=\infty)$ に対して，$\Xi$ の表式中の $n_\alpha$ の和を実行せよ。

**問 2** フェルミ粒子とボーズ粒子に対して，グランドポテンシャル $J=-k_{\mathrm{B}}T\ln\Xi$ から粒子数の期待値 $N$ を求め，その表式にフェルミ分布関数 $n_{\mathrm{F}}(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}+1}$ およびボーズ分布関数 $n_{\mathrm{B}}(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}-1}$ が現れることを示せ。また，適当な $T,\mu$ に対して，$n_{\mathrm{F}}(\varepsilon)$ と $n_{\mathrm{B}}(\varepsilon)$ の概形を図示せよ。

**問 3** 理想気体において，波数 $\boldsymbol{k}$ の粒子の運動エネルギーは $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \dfrac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m}$ で与えられる。単位エネルギー・単位体積当たりの状態数 (状態密度)$D(\varepsilon)$ を求めよ。ここで, $\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ であり, $h$ はプランク定数である。

**問 4** 理想気体におけるフェルミ縮退およびボーズ・アインシュタイン凝縮について，それぞれ簡潔に説明せよ。

**問 5** $N$ 個の粒子から成る理想フェルミ気体において，基底状態のエネルギーを求め，$N$ を用いて表せ。

**問 6** $N$ 個の粒子から成る理想ボーズ気体において，ボーズ・アインシュタイン凝縮温度を求め，$N$ を用いて表せ。

**問 7** **問 1** において，$n_\alpha$ の和の上限が $M=2$ であるような，フェルミ粒子とボーズ粒子の中間的な粒子を考える。この粒子 $N$ 個から成る理想気体の基底状態エネルギーは，**問 5** で求めたエネルギーの何倍になるか答えよ。