

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物質科学専攻 物理学 PG

令和5年4月入学試験問題

令和4年秋期入学試験問題

物 理 学 I

2022年8月31日 13:00 ~ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙3枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は㊶から㊸まで3問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題㊶、問題㊷、問題㊸を、それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して、問題が小問に分かれている場合には、小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に、枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には、手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は、解答の有無にかかわらず、答案用紙3枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

(50点)

図1のように、質量 m のおもりと質量 $\frac{1}{2}m$ のおもりが、バネ定数 k のバネによってつながれ、また同じバネ定数 k のバネによって壁につながれている。3つのバネは一直線上にあり、おもりはその直線上を運動する。2つのおもりが静止した平衡状態では、バネは自然長になっている。おもりの平衡位置からの変位を、左のおもりについては x 、右のおもりについては y とする。どちらの変位も右向きを正とする。

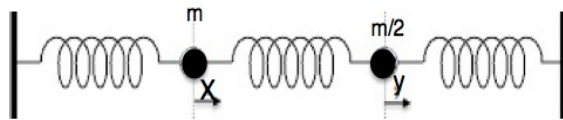


図1

問1 2つのおもりの運動方程式を求めよ。

問2 固有角振動数を求めよ。

問3 それぞれの固有角振動数に対して、基準モードの解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ。

問4 2つの基準モードがそれぞれどのような運動を表しているか、図を用いて説明せよ。

問5 次に系のエネルギーを考察する。位置座標 x , y 及びその時間微分 \dot{x} , \dot{y} を用いて、全力学系のエネルギー E は次のように書ける。

$$E = \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}' \end{pmatrix} + \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} x & y' \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}$$

但し $y' = \frac{y}{\sqrt{2}}$ である。対称行列 A を求めよ。

問6 A の固有値・固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルを規格化する必要はない。

問7 エネルギー E が、問2で求めた固有角振動数を持つ2つの独立な調和振動子の和で書けることを示せ。

2

(50点)

(I) 図1に示すように半径 R の円形導線に電流 I が流れており、円形導線の中心 O から垂直軸に沿って距離 z に点 P がある。ただし、以下の全ての問において導線の太さは無視し、真空の透磁率を μ_0 とする。

問1 円形導線上の微小線要素 ds が点 P に作る磁束密度の大きさ dB を求めよ。

問2 この円形導線を通る電流全体が、点 P に作る磁束密度の大きさ B を求めよ。

(II) 次に、図2に示すように半径 a の円筒に単位長さあたり n 巻の導線が巻かれているソレノイドコイルを考える。ここで導線には電流 I が流れており、中心軸上の点 P での磁場を考える。ただし、巻き数 n は十分に密であるとする。

問3 図2(上)のように、点 P から距離 z 離れたところにある微小厚さ dz を持つ円筒を考え、これが点 P に作る磁束密度の大きさ dB を θ , $d\theta$, n , I を用いて表せ。

問4 図2(下)のように、点 P からコイルの近い端までを結ぶ直線がなす角を θ_1 、遠い端までのなす角を θ_2 とする時、点 P での磁束密度の大きさ B を θ_1 , θ_2 , n , I を用いて表せ。また、 $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$ とすると磁束密度の大きさはどのようなになるか答えよ。

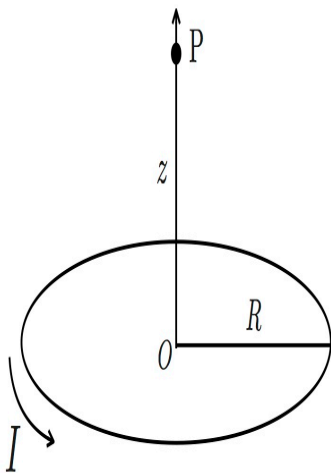


図1

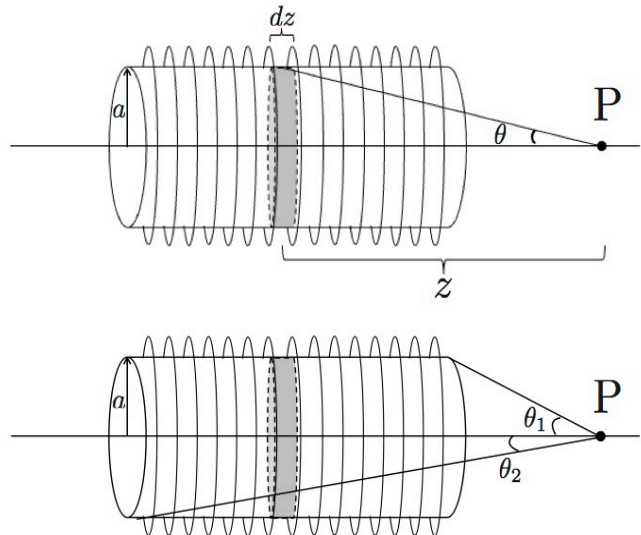


図2

(III) (I) で見たように、円形導線を流れる電流が中心軸上を作る磁場は軸上の距離 z に依存するが、2つの円形導線を用いると一様磁場を作ることができる(ヘルムホルツコイル)。ここで、図3のように半径 R の同じ円形導線の中心軸を共通にして距離 d 離して配置し、両者に同じ向きに電流 I を流すことを考える。ただし、2つの円形導線の中心軸上の中点を $z = 0$ とする。

問5 2つの円形導線が中心軸上を作る磁束密度の大きさ B を z の関数として表せ。

問6 問5の答えを z で微分し、 dB/dz を求め、中点 ($z = 0$) でゼロになることを示せ。

問7 2つの円形導線間の距離をある値とすると、中点で磁束密度の2階微分がゼロになる。中点で $d^2B/dz^2 = 0$ となる距離 d を決めよ。また、その時の中点での磁束密度の大きさを求めよ。

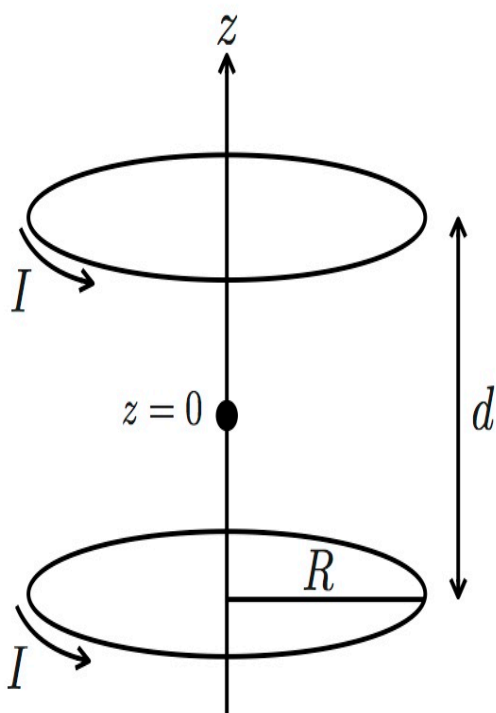


図3

3

(50点)

カルノーサイクルにおける四つの状態、 $A(P_1, V_1, T_1)$, $B(P_2, V_2, T_1)$, $C(P_3, V_3, T_2)$, $D(P_4, V_4, T_2)$ を考える。ここで、 (P_i, V_j, T_k) はそれぞれの状態の (圧力, 体積, 温度) であり、

$A \rightarrow B$ は等温膨張過程,

$B \rightarrow C$ は準静的断熱膨張過程,

$C \rightarrow D$ は等温圧縮過程,

$D \rightarrow A$ は準静的断熱圧縮過程である。

作業物質は n モルの理想気体とする。

以下の問いに対して、図示の場合を除き、最終結果だけでなく導出/計算過程と説明を明記して答えよ。

問1 カルノーサイクルの $P-V$ 図を図示せよ。

問2 カルノーサイクルの各過程における各々の仕事 $W_{AB}, W_{BC}, W_{CD}, W_{DA}$ を状態量を用いて示せ。気体定数を R , 定積モル比熱を C_V とすること。

また、理想気体では、 $d'Q = nC_V dT + PdV$ が成り立つ ($d'Q$: 熱量 Q の不完全微分)。

問3 準静的断熱過程では、ポアソンの式、 $PV^\gamma = \text{const.}$ が成り立つ。ここで、 γ は、 C_V と定圧モル比熱 C_P の比である比熱比 ($\frac{C_P}{C_V}$) である。この関係を用いて、

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

が成り立つことを示せ。

問4 1 サイクルで気体がした全仕事 W_{all} について、

$$W_{\text{all}} = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

と表されることを示せ。

問5 このサイクルの仕事効率 η を求めよ。ただし、状態量は絶対温度 T_1, T_2 だけを使って書き表すこと。

蒸気タービンを用いた火力発電は、断熱膨張により仕事を取り出せるサイクルシステムとみなせる。この火力発電のサイクルシステムが理想的なカルノーサイクルであると仮定し、取り出せる単位時間あたりの仕事 W_T が 12 万 kW、サイクルシステム効率 η が 67 % として、以下の問いに答えよ。

ただし、解答の際、問いが図示の場合を除き、最終結果だけではなく導出/計算過程と説明を明記すること。

問 6 12 万 kW を取り出すために必要な単位時間あたりの熱量 Q_S (kJ/s) を求めよ。
有効数字は 4 桁とする。

問 7 火力発電に用いる重油の燃焼熱 Q_O が 6×10^4 kJ/kg である時、1 年間の重油消費量 C_Y (kg/年) を求めよ。
有効数字は 4 桁とする。

問 8 この火力発電では、 $T_1 = 800.0$ K で運用している。 T_2 (K) を求めよ。
有効数字は 4 桁とする。