

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 物質科学専攻 物理学 PG

令和5年4月入学試験問題

令和4年秋期入学試験問題

物 理 学 II

2022年8月31日 15:00 ~ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙2枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は㊶から㊷まで2問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題㊶、問題㊷を、それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して、問題が小問に分かれている場合には、小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に、枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には、手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は、解答の有無にかかわらず、答案用紙2枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

(75点)

1次元の空間上で質量 m の粒子の量子力学的な運動を考える。 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものとし、運動量演算子 \hat{p} を

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}$$

とする。

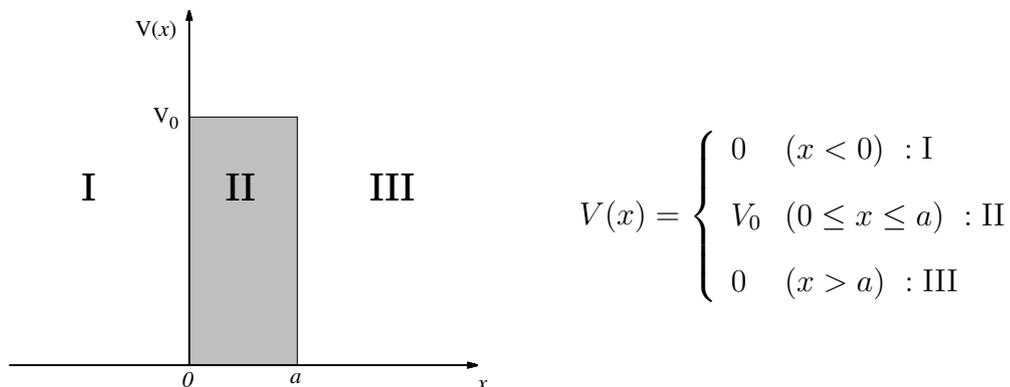
問1 自由粒子系のハミルトニアン \hat{H}_0 を \hat{p} と m を用いて表せ。また系のエネルギーを \mathcal{E} 、波動関数を $\Phi(x)$ として、定常状態のシュレディンガー方程式を書け。

問2 自由粒子系の $\Phi(x)$ が一般に

$$\Phi(x) = A \exp[ikx] \quad (A, k \text{ は定数}, k \geq 0)$$

と書ける。 \hat{p} 及び \hat{H}_0 の固有値を k を用いて、それぞれ求めよ。

次に以下の様に厚さ a の障壁ポテンシャル $V(x)$ を置き、入射エネルギー \mathcal{E} が $0 < \mathcal{E} < V_0$ の粒子の透過率を考える。 V_0 は正の定数。



この時、波動関数は領域 I, II, III において

$$\Phi_{\text{I}}(x) = A \exp[ikx] + B \exp[-ikx],$$

$$\Phi_{\text{II}}(x) = C \exp[\kappa x] + D \exp[-\kappa x],$$

$$\Phi_{\text{III}}(x) = E \exp[ikx]$$

と書ける。 $A, B, C, D, E, \kappa (\kappa > 0)$ は定数である。 $\Phi_{\text{I}}(x)$ の第一項は入射波と反射波を表し、 $\Phi_{\text{III}}(x)$ は透過波を表している。

問3 定数 k, κ を \mathcal{E}, V_0 用いて求めよ。

問4 $V(x)$ の境界 $x = 0, a$ における, 波動関数を滑らかに繋ぐ境界条件を示せ。

問5 以下の手順に沿って透過率 T を求めよ。途中 $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ を使ってまとめてよい。

(1) 問4の境界条件より, C 及び D を E を用いて表せ。

(2) A 及び B を C 及び D を用いて表せ。

(3) 透過率 $T = \left| \frac{E}{A} \right|^2$ を k, κ を用いて示せ。

ここで透過率 T の近似式を導出し, アルファ崩壊の崩壊幅 Γ_α を見積もる。

問6 障壁ポテンシャルが $1/\kappa$ に対して十分に厚く $\kappa a \gg 1$ となる時,

$$T \simeq K \exp[-2\kappa a],$$

と書ける事を示せ。また K を \mathcal{E}, V_0 を用いて示せ。

x が1より十分に大きい時, $\sinh(x) \simeq e^x/2$ であり, $e^x \gg 1$ とする。

アルファ崩壊の崩壊幅は崩壊率 λ に \hbar を掛けたものである。崩壊率は透過率 T と障壁ポテンシャルに衝突する頻度の積で見積もる事にする。アルファ粒子が半径 R の原子核の中で, 速度 $\sqrt{2\mathcal{E}/m_\alpha}$ で衝突しているとすると崩壊幅 Γ_α は

$$\Gamma_\alpha = \hbar \lambda \sim \frac{\hbar}{2R} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_\alpha}} K \exp[-2\kappa a],$$

と粗く見積もる事にする。

問7 アルファ崩壊する仮想的な原子核と放出されるアルファ粒子の情報が以下の様に与えられた場合, Γ_α の値を10のべき乗を含む形で示せ。べき数は小数点以下を四捨五入し、整数で示す事。: $R = 7 \text{ fm}$, $V_0 = 30 \text{ MeV}$, $\mathcal{E} = 5 \text{ MeV}$, $a = 18.4 \text{ fm}$, $m_\alpha c^2 = 4 \times 10^3 \text{ MeV}$, $\hbar c = 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ 。

但し, 光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$ とする。

計算を簡単にする為, $\log_e 10 \doteq 2.3$, $\sqrt{5} \doteq 2.24$ として使用してよいものとする。

2

(75点)

同種の原子 N 個からなる絶縁体 (固体) の性質 (比熱) を考える。絶縁体の内部は, x, y, z の3つの方向に振動している計 $M = 3N$ 個の, 独立な1次元調和振動子が空間的に整列しているとする。 i 番目の調和振動子のエネルギーが

$$E_i = \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

と与えられるとする (ω_i は固有角振動数, $n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$)。ただし, 全ての振動子が同じ非零の固有角振動数 ω を持つとする。

問1 分配関数 Z を求めよ。

問2 問1の結果を用いて, 内部エネルギー U を求めよ。

問3 問2の結果を用いて, 定積比熱 C_V を求めよ。

問4 問3で得られた比熱 C_V の温度依存性をグラフに示し論じよ。特に高温部および低温部における漸近形を議論せよ。

問5 問2で得られた比熱 C_V は, 実験で得られる結果をよく説明しない。最も大きな違いを定性的に述べよ。また, 実験結果との整合性を説明するには, 上述のモデルをどのように改良したら良いか定性的に述べよ。