

# 埼玉大学大学院理工学研究科

## 博士前期課程 物質科学専攻 物理学 PG

令和7年4月入学試験問題

令和6年秋期入学試験問題

# 物 理 学 I

2024年9月3日 13:00 ~ 14:30

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙3枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は①から③まで3問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題①, 問題②, 問題③を, それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して, 問題が小問に分かれている場合には, 小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に, 枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には, 手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は, 解答の有無にかかわらず, 答案用紙3枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

(50点)

図1のように、地球中心を原点とする静止座標系  $X, Y, Z$  を考え、 $X, Y$  軸は赤道面内にある直交する軸、 $Z$  軸は南極点から北極点を通るものとし、それらの単位ベクトルを  $e_X, e_Y, e_Z$  とする。さらに、地球表面上のある点 (緯度  $\alpha$ ) を原点とした地球に固定した回転座標系  $x, y, z$  を考える。この回転座標軸の単位ベクトルを原点の接平面上南向きに  $e_x$ 、東向きに  $e_y$ 、鉛直上方に  $e_z$  とする。ここで、回転座標系の回転軸は  $Z$  軸である。以下の問に答えよ。

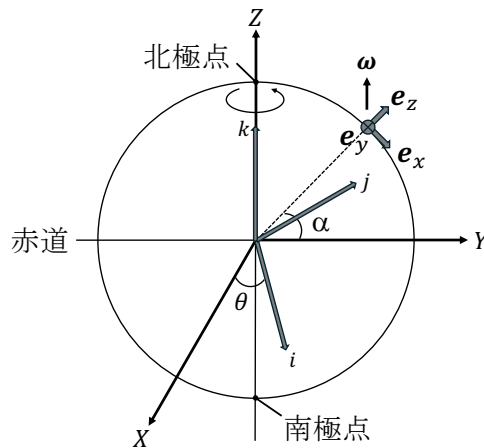


図 1: 地球に固定した回転座標系 ( $e_x, e_y, e_z$ )

**問 1** 図1のように、静止座標系  $X, Y, Z$  の  $Z$  軸を共有する回転座標系  $i, j, k$  を考え、その単位ベクトルを  $e_i, e_j, e_k$  とする。

(a)  $e_i, e_j$  を  $e_X, e_Y$  を用いて表せ。ただし、 $e_X$  と  $e_i$  のなす角を  $\theta$  とする。

(b) (a) で求めた式を時間微分し、 $\dot{e}_i, \dot{e}_j$  を  $e_X, e_Y, \dot{\theta}$  を用いて表せ。

(c) 角速度ベクトルは  $\omega \equiv \dot{\theta} e_Z$  と定義できる。これと (b) の結果から、 $\dot{e}_i = \omega \times e_i$ 、 $\dot{e}_j = \omega \times e_j$ 、 $\dot{e}_k = \omega \times e_k$  を導出せよ。

**問 2** 回転座標系  $x, y, z$  の原点から測った任意の位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  を時間で 2 階微分し、質量  $m$  の物体の回転座標系における運動方程式を導け。物体に働く重力を  $\mathbf{F}_G$  とする。ただし、地球の自転角速度は北向きに  $\omega (\equiv \omega e_Z)$  とし、解答の際には問 1 の結果を一般化した  $\dot{e}_x = \omega \times e_x$ 、 $\dot{e}_y = \omega \times e_y$ 、 $\dot{e}_z = \omega \times e_z$  および回転座標系に固定された観測者からみた速度  $\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 、加速度  $\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  を用いて式を整理せよ。

**問 3** 地球の自転角速度を一定とし、遠心力を無視することで、問 1 で求めた運動方程式は  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  と書き下せる。右辺の第 1 項が遠心力込みの重力、第 2 項がコリオリ力である。このとき、以下の問に答えよ。

(a) 地球の自転角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  を  $e_x, e_y, e_z$  を用いて表せ。

(b) 運動方程式を回転座標系  $x, y, z$  の各成分に分離せよ。但し、重力は  $\mathbf{F} = F_x e_x + F_y e_y + F_z e_z$  として良い。

**問 4** 地表に固定した回転座標系の原点上空 ( $z = h$ ) の場所から、質量  $m$  の質点を南に向かって、初速度  $\mathbf{v} = v_0 e_x$  で水平に放り投げるとき、時刻  $t$  における質点の位置  $x, y, z$  を求めよ。なお、重力加速度を  $g$  とし、 $\omega, y$  は微小量として、それらの積の項は無視してよい。

**問 5** 問 4 の答を踏まえ、日本における台風が反時計回りに渦を巻く理由を考察せよ。なお、空気の重力落下は無視できるものとする。

2

(50点)

以下の電磁気学に関する【I】，【II】，【III】の状況において，各問に答えよ。真空の透磁率を  $\mu_0$ ，誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

【I】 次の定常電流に関する問に答えよ。

問1 図2(a)のように，十分に細く，無限に長い導線に電流  $I_1$  が流れている時，導線から距離  $r$  離れた点Pにできる磁束密度の大きさ  $B(r)$  と向きを求めよ。電流  $I_1$  の向きは図2(a)の矢印の向きとする。

問2 図2(b)のように，電流  $I_1$  と平行に距離  $r$  離れたところに，十分に細く，無限に長い導線を固定する。この導線に電流  $I_2$  を流した時，導線間に働く単位長さ当たりの力の大きさ  $F(r)$  と向きを求めよ。電流  $I_1, I_2$  の向きは図2(b)の矢印の向きとする。

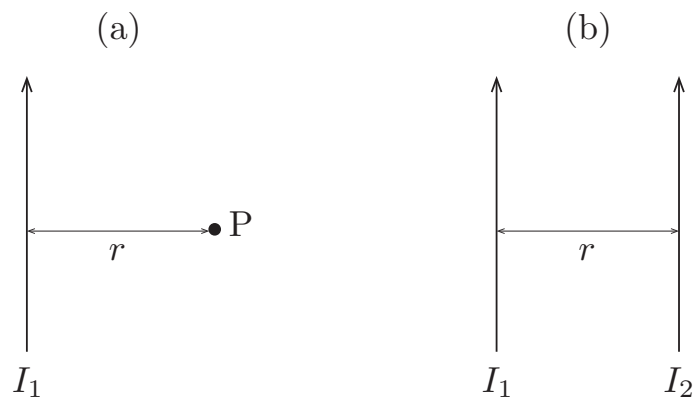


図2: (a) 点Pから距離  $r$  にある電流  $I_1$ 。 (b) 距離  $r$  離れた互いに平行な電流  $I_1$  と  $I_2$ 。

【II】 次の静電場に関する問に答えよ。

問3 電荷の大きさ  $+q, -q$  を持つ2つの点電荷が，それぞれ直交座標系で  $\mathbf{r}_1 = (0, 0, a/2)$ ， $\mathbf{r}_2 = (0, 0, -a/2)$  に置かれている。 $q > 0, a > 0$  とする。

これらの電荷による位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  における静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  を求めよ。ただし， $r = |\mathbf{r}| \gg a$  とし， $a/r$  の2次以上の微小量は無視する。また無限遠を基準にとる。

問4  $r \gg a$  における電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を求めよ。

【III】 次のラプラス方程式に関する問に答えよ。

3次元の極座標  $(r, \theta, \varphi)$  におけるラプラス方程式

$$\Delta\phi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (1)$$

の解は、 $\phi$  が軸対称であるとき、

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $P_l(\cos \theta) (l = 0, 1, 2, \dots)$  はルジャンドル多項式、 $A_l, B_l$  は定数である。 $l = 0, 1$  のみの簡単な場合は以下のように書ける。

$$\phi(r, \theta) = \left( A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3)$$

**問5** 図3のように、接地された半径  $a$  の導体球を  $z$  方向を向く一様な電場  $\mathbf{E}_0$  の中に持ってくる。導体球の中心を座標系の原点にとる。この時、導体球の外部の静電ポテンシャル  $\phi(r, \theta)$  は式(3)の形で与えられる。 $A_0, A_1, B_0, B_1$  を求めよ。また、式(2)で  $l \geq 2$  に対して、 $A_l = 0, B_l = 0$  となる理由を述べよ。

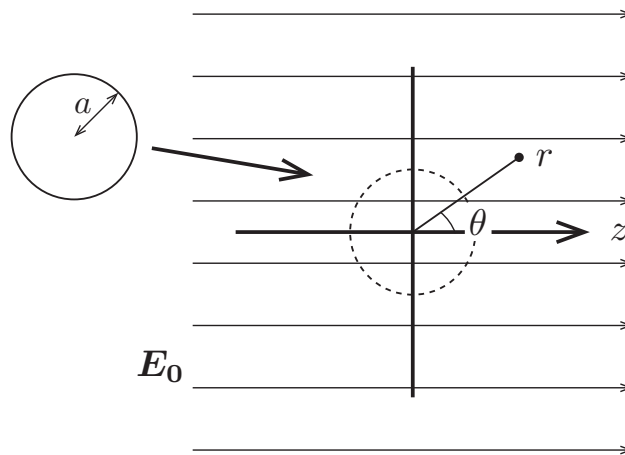


図3:  $z$  軸方向を向く一様な電場  $\mathbf{E}_0$  の中に、接地された半径  $a$  の導体球を持ってくる様子。図のように、導体球の中心を含み電場に平行な面において、点の座標を導体球の中心からの距離  $r$  と中心からの点までの線分が  $z$  軸となす角度  $\theta$  とする。

**問6** 導体球の周りの電気力線の変化の様子を図示せよ。また、【II】で求めた静電ポテンシャルあるいは電場との類似点を説明せよ。

**問7** 導体球上に誘導される電荷密度  $\rho(\theta)$  を求めよ。

3

(50点)

図4は、 $n$  molの理想気体を作業物質とする熱サイクルの圧力( $P$ )と体積( $V$ )の変化を示したものである。この理想気体の比熱比を $\gamma$ とする。ここで、 $\gamma$ は、定積モル比熱 $C_V$ と定圧モル比熱 $C_P$ の比 $\frac{C_P}{C_V}$ である。A $\rightarrow$ Bは、等温膨張過程、B $\rightarrow$ Cは、等積(等容)減圧過程、C $\rightarrow$ Aは、断熱圧縮過程である。等温過程での温度 $T$ を $T_0$ とし、A, B, Cでの圧力をそれぞれ $\alpha P_0, P_0, \beta P_0$ とする。ここで、 $\alpha > 1, 0 < \beta < 1$ を満たす定数である。この問題における状態変化はすべて準静的であるととし、気体定数を $R$ として以下の問に答えよ。必要に応じて、理想気体において成り立つマイヤーの関係式( $C_P - C_V = R$ )と理想気体の準静的断熱過程において成り立つポアソンの式( $PV^\gamma = \text{一定}$ )は、断りなく使用してよい。

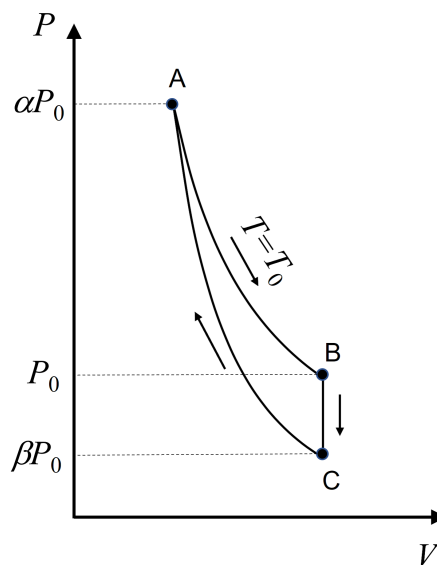


図4: 等温膨張過程, 等積(等容)減圧過程, 及び断熱圧縮過程からなる熱サイクル。

問1 比熱比 $\gamma$ を $\alpha$ と $\beta$ だけを用いて表せ。

問2 この熱サイクルが一周回ることによってする仕事 $W$ を $n, R, \alpha, \beta$ , 及び $T_0$ だけを用いて表せ。

問3 この熱サイクルの仕事効率 $\eta$ を求め、 $\beta$ だけを用いて表せ。ここで、仕事効率は、一サイクルにおいて高熱源から得た熱量を $Q$ とすると、 $\eta = \frac{W}{Q}$ と定義されるが、このサイクルでの $Q$ は、A $\rightarrow$ Bの過程で理想気体が得た熱量である。

問4 A $\rightarrow$ Bの過程でのエントロピー変化 $\Delta S_{A\rightarrow B}$ , B $\rightarrow$ Cの過程でのエントロピー変化 $\Delta S_{B\rightarrow C}$ , 及びC $\rightarrow$ Aの過程でのエントロピー変化 $\Delta S_{C\rightarrow A}$ を求めよ。

- 問 5** この熱サイクルの温度とエントロピー  $S$  の関係を、縦軸  $T$ 、横軸  $S$  とするグラフ ( $T-S$  図) に書け。ただし、エントロピーに関しては、値そのものを求める必要はなく、相対的な変化量をグラフに明記すればよい。また、 $B \rightarrow C$  の過程においては、温度のエントロピーに関する関数形を明らかにし、それに基づいてグラフにすること。
- 問 6** 問 5 の  $T-S$  図において、このサイクルが囲む面積  $A_s$  を求め、 $n, R, \alpha, \beta$ , 及び  $T_0$  だけを用いて表せ。また、 $A_s$  が物理的に何を意味するかについても答えよ。