埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　物質科学専攻　物理学 PG

令和 7 年 4 月入学試験問題

令和 6 年秋期入学試験問題

物　理　学　II

2024 年 9 月 3 日　15:00 ～ 16:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は$\boxed{1}$から$\boxed{2}$まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題$\boxed{1}$，問題$\boxed{2}$を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

$\boxed{1}$ （75 点）

質量 m, 角振動数 ω をもつ 2 次元等方調和振動子の量子力学を考える。この系のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は次のように与えられる：

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \hat{x}_k^2 \right] .$$

但し，$\hat{x}_k$ を位置演算子，$\hat{p}_k$ を運動量演算子とし，正準交換関係は

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \, \delta_{kl} \, , \quad [\hat{x}_k, \hat{x}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \qquad (k, l = 1, 2) \, , \qquad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

で与えられる。δ_{kl} はクロネッカーのデルタであり，h はプランク定数である。

このとき，以下の問に答えよ。

問 1 次の生成消滅演算子

$$\hat{a}_k^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{m\omega} \, \hat{x}_k - i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \, \hat{p}_k \right] , \quad \hat{a}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{m\omega} \, \hat{x}_k + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \, \hat{p}_k \right]$$

が満たす交換関係を導け。

問 2 $\hat{H}$ を生成消滅演算子を用いて表せ。

問 3 各 k に対して状態 $|0\rangle_k$ を

$$\hat{a}_1 |0\rangle_1 = \hat{a}_2 |0\rangle_2 = 0 \tag{1}$$

によって定義すると，この系の基底状態は $|0\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$ と書ける。$\hat{H}$ のすべての固有状態 (規格化因子を含む) を $|0\rangle_k$ と生成演算子で書き表し，それらの固有値を求めよ。

問 4 **問 3** で求めた各固有値の縮退度を求めよ。

問 5 (1) 式を，座標 x_k を変数とする微分方程式に書き換え，対応する規格化された基底状態の波動関数 $\psi_0(r)$ を求めよ。但し，$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする。

問 6 規格化された第一励起状態の波動関数とエネルギーを求めよ。

$\boxed{2}$ （75 点）

体積 V の箱（3 次元）に閉じ込められた，巨視的な数の単原子分子からなる理想気体の古典統計力学を考える。粒子 (単原子分子) の質量を m，プランク定数を h とする。以下の【I】,【II】,【III】,【IV】の状況において，各問に答えよ。

【I】N 個の粒子系について，カノニカル分布に基づいて考える。分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!}\int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{r}_i d\boldsymbol{p}_i}{h^3}\right) e^{-\beta H}, \quad H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}$$

で与えられる。$\boldsymbol{r}_i$ と $\boldsymbol{p}_i$ はそれぞれ i 番目の粒子の位置座標および運動量，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ は逆温度である。以下では，ガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (a > 0)$，および，十分大きな N に対して成り立つ公式 $\ln N! \simeq N\ln(N/e)$ を用いてよい。

問 1 分配関数 $Z(T, V, N)$ を求めよ。

問 2 ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

問 3 内部エネルギーを求めよ。

問 4 化学ポテンシャルを求めよ。

【II】グランドカノニカル分布に基づいて考える。化学ポテンシャルを μ，温度を T とする。

問 5 大分配関数 $\displaystyle\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}\int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{r}_i d\boldsymbol{p}_i}{h^3}\right) e^{-\beta(H-\mu N)}$ を求めよ。

問 6 グランドポテンシャルを求めよ。

問 7 粒子数の期待値を求め，**問 4** の結果と比較せよ。

【III】N 個の粒子系について，ミクロカノニカル分布に基づいて考える。エネルギーが E から $E+\Delta E$ の範囲にある状態の数を $W(E,V,N)\Delta E$ とする。ΔE は十分小さいとする。

問 8 状態密度 $W(E,V,N)$ を求めよ。ただし，d 次元の単位球の表面積が $\dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ で与えられることを用いて良い。$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。

問 9 エントロピーをエネルギー E の関数として求めよ。ただし，十分大きな正の実数 x に対して成り立つ公式 $\ln\Gamma(x) \simeq x\ln(x/e)$ を用いてよい。

問 10 温度をエネルギー E の関数として求めよ。

【IV】気体中のひとつの粒子に着目し，次の運動方程式を考える：

$$m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = -\gamma\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

ただし $\boldsymbol{v}(t)$ は時刻 t における粒子の速度，γ は減衰定数である。$f_k(t)$ $(k=x,y,z)$ は，ガウス分布に従うランダム力（熱雑音）であり，$\langle f_k(t)\rangle = 0$ および次の関係式を満たす：

$$\langle f_k(t)f_l(t')\rangle = A\delta_{kl}\delta(t-t')$$

ここで $\langle\cdots\rangle$ はガウス分布における平均を表す。δ_{kl} はクロネッカーのデルタ，$\delta(t)$ はデルタ関数，A は定数である。

問 11 初期条件を $\boldsymbol{v}(-\infty) = \boldsymbol{0}$ とした場合の解を，$\boldsymbol{v}(t) = a\displaystyle\int_{-\infty}^{t} dt'\boldsymbol{f}(t')e^{b(t-t')}$ の形で与える。定数 a, b を求めよ。

問 12 運動エネルギーの平均 $\langle\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2\rangle$ を求めよ。

問 13 前問の平均運動エネルギーが，カノニカル分布における 1 粒子当たりの内部エネルギーと同じ結果になるとき，A を温度 T と必要な定数を用いて表せ。