埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　物質科学専攻　物理学 PG

令和 8 年 4 月入学試験問題

令和 7 年秋期入学試験問題

物　理　学　I

2025 年 9 月 2 日　13:00 ～ 14:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は$\boxed{1}$から$\boxed{2}$まで 2 問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題$\boxed{1}$，問題$\boxed{2}$を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙　2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 （75点）

A

図1のように，バネ定数kで壁につながれた質点mを考える。質点の運動方向はバネの伸び縮み方向のみで，x軸とする。バネが伸びる方向を正とする。バネが自然長のとき質点の位置は$x=0$であった。以下の問に答えよ。

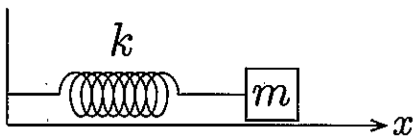

図1

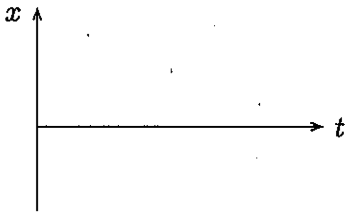

図2

問1 質点にバネの復元力のみはたらき，そのほかの抵抗力が働かないとき，質点の運動方程式を書け。

問2 時刻$t=0$における初期条件として$x=x_0$，$\dot{x}=0$のとき，**問1**の運動方程式を解け。

問3 質点に速度に比例した抵抗力Γが働くときの運動方程式を書け。

問4 **問3**の運動方程式の一般解を以下の2通りで求めよ。微分方程式の積分定数は各自で定義してよい。また，図2のように質点の位置xの時間変化の概形をそれぞれグラフに描け。

(a) $\dfrac{\Gamma}{2m} < \omega_0$

(b) $\dfrac{\Gamma}{2m} > \omega_0$

ただし，$\omega_0 = \sqrt{k/m}$とする。

問5 問4(a)の場合で，初期条件として$x=x_0$，$\dot{x}=0$のとき，解を求めよ。

$\boxed{\mathrm{B}}$

位置 $\boldsymbol{r}$ と時間 t に依存するポテンシャル $V(\boldsymbol{r}, t)$ 中を運動する質量 m の粒子を考える。

問 6 円柱座標 (r, θ, z) とデカルト座標 (x, y, z) の関係を表せ。

問 7 ラグランジアン L を円柱座標 (r, θ, z) を使って表せ。

問 8 円柱座標に対するラグランジュの運動方程式を求めよ。

問 9 角運動量の z 成分 $J = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ を円柱座標を使って表せ。

問 10 ポテンシャル V が θ に依存しないとき，J が保存することを示せ。

2 (75 点)

A

図 3 のように面積 S の平行平板コンデンサーの両極板間が 2 つの板状の誘電体 1 と誘電体 2 で満たされている。誘電体 1 と 2 の (厚さ, 誘電率) をそれぞれ (d_1, ε_1) と (d_2, ε_2) とする。また，端効果は無視できるものとする。

以下の問に答えよ。

問 1 コンデンサーの静電容量を求めよ。

問 2 誘電体 1 側の極板における電位と誘電体 2 側の極板における電位をそれぞれ V_1 と V_2 としたとき，コンデンサー内部の電束密度を求めよ。ただし，$V_2 > V_1$ である。また，誘電率 ε_1 側の極板からの距離を z とし，極板間の任意の点の電位 $V(z)$ を求めよ。

次に，極板間の距離と極板の面電荷密度を保ったまま，誘電体 2 のみを取り除いた (図 4)。誘電体 2 を取り除いた後の空間は真空であり，誘電率は $\varepsilon_0(\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > \varepsilon_0)$ とする。

問 3 蓄えられている静電エネルギーを答えよ。また，残った誘電体 1 にはどのような力が作用しているか。その力の向きと根拠を答えよ。

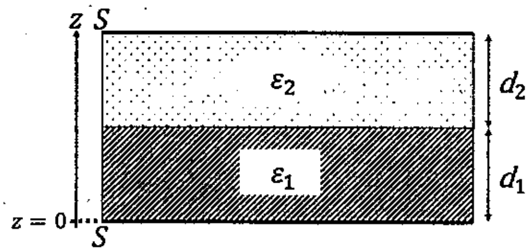

図 3

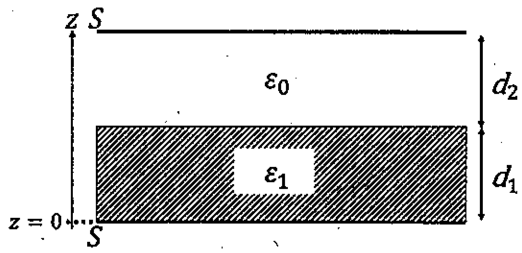

図 4

B

磁束密度を任意の閉じた経路 C にそって線積分した量は，その経路で囲まれる面 S を貫く電流に比例し，次の関係式が成立する。

$$\int_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$$

ここで，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{i}$，μ_0 は位置と磁束密度，電流密度，真空透磁率である。また，上記の関係式がアンペールの法則の積分形である。

問 4 図 5 のように，半径 a の無限に長い円柱状の導線に電流 I が流れている。導線の円柱中心軸と円柱動径方向をそれぞれ z 軸と r 方向とし，電流方向を z 軸の正方向とする。アンペールの法則を用いて，r における磁束密度の大きさ $B(r)$ を (i)$r > a$ と (ii)$r \leqq a$ の場合に分けて答えよ。

問 5 図 6 のように，内半径と外半径がそれぞれ a と b の無限に長い中空円柱状の導線に電流が流れている。また，問 4 と同様に，導線の中空円柱の中心軸と動径方向をそれぞれ z 軸と r 方向とし，電流方向を z 軸の正方向とする。電流密度 i は以下のような r 依存性をもつとして，r における磁束密度の大きさ $B(r)$ を (i)$0 \leqq r < a$ と (ii)$a \leqq r \leqq b$ と (iii)$b < r$ の場合に分けて答えよ。

$$i(r) = \begin{cases} i_0 \exp(-\lambda r^2) & (\ a \leqq r \leqq b), \\ 0 & (\ 0 \leqq r < a,\ b < r). \end{cases}$$

ここで，i_0 と λ は定数である。

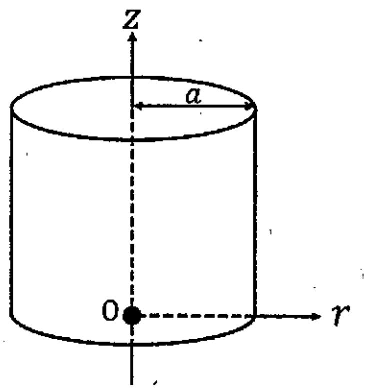

図 5

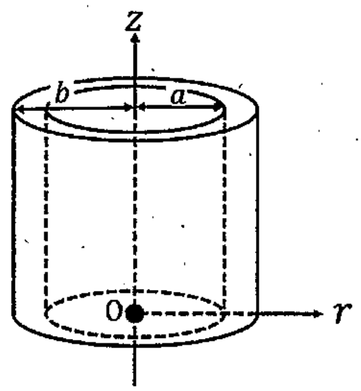

図 6

問 6 アンペールの法則の積分形を変形し，微分形を求めよ。また，問 5 の導線内 ((ii)$a \leqq r \leqq b$) でアンペールの法則の微分形が成り立つことを示せ。

円柱座標系におけるベクトル $\mathbf{A}$ の回転は

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\mathrm{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathrm{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathrm{e}_z$$

である。

（計算用紙）

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　物質科学専攻　物理学PG

令和８年４月入学試験問題

令和７年秋期入学試験問題

物　理　学　II

2025年9月2日　15:00 ～ 16:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始60分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙２枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は$\boxed{1}$から$\boxed{2}$まで２問ある。そのすべてを解答すること。
5. 問題$\boxed{1}$，問題$\boxed{2}$を，それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して，問題が小問に分かれている場合には，小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に，枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には，手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は，解答の有無にかかわらず，答案用紙２枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は，次ページからです。

1 (75 点)

質量 m の粒子の量子力学的な散乱を考える。$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとし, 運動量演算子は $\hat{\boldsymbol{p}} \equiv -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ とする。

問 1 自由粒子の定常状態をあらわすシュレディンガー方程式を, 系のエネルギーを E として示せ。また, 波数ベクトルを $\boldsymbol{k}$ として, 解となる波動関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ を示せ。

問 2 問 1 で得られたシュレディンガー方程式に, 空間に依存するポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ を導入する。この解の波動関数を $\psi(\boldsymbol{r})$ とする。以下の関係を満たすグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$,

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

を導入する。ここで, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, および $U(\boldsymbol{r}) = \dfrac{2m}{\hbar^2}V(\boldsymbol{r})$ と定義すると, 以下の形式解がシュレディンガー方程式を満たすことを示せ。

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}) + \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'.$$

問 3 三次元空間中で, 球対称なポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ によって弾性散乱する粒子の波動関数は, 入射方向を z とすると, 遠方 $(|\boldsymbol{r}| \to \infty)$ では以下の形式で表される,

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}.$$

θ は散乱方向とする。ここで, グリーン関数が

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

と与えられるとき, $V(\boldsymbol{r}')$ が限られた空間領域にのみ存在し, $|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$ として近似できる場合の散乱振幅 $f(\theta)$ を導出せよ。

問 4 問 2 の形式解に第一ボルン近似を適用し, 問 3 の条件下で, 散乱振幅 $f(\boldsymbol{q})$ を表せ。ここで, 第一ボルン近似で導入される波動関数の波数ベクトルを $\boldsymbol{k}'$ とし, 運動量移行を $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ とする。また, θ 依存性は明示しなくてよい。

問 5 $V(r)$ が以下のような定数 V_0, 幅 $a > 0$ を持つ球対称なガウス関数で与えられるとする,

$$V(r) = \frac{V_0}{(a\sqrt{2\pi})^3}\exp\left[-\frac{r^2}{2a^2}\right].$$

このとき, 問 4 で得られた式を用いて, 散乱振幅を $q(=|\boldsymbol{q}|)$ の関数として求めよ。以下の積分公式を使用してよい。ただし, α は定数, $\mathbf{x}$ は三次元空間を表すベクトルとする。

$$\int d\mathbf{x}\; e^{-\alpha \mathbf{x}^2} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)^3$$

問 6 問 5 までで得られた結果を用いて以下の問いに答えよ。

(1) 微分散乱断面積は $|f(\boldsymbol{q})|^2$ で表される。これを小さい q に対してテイラー展開し, 1 次の項まで示せ。

(2) ポテンシャルの幅が有限の場合と点状の場合を比較し, a 及び q を用いて微分散乱断面積の振舞いを説明せよ。

2 （75 点）

N 個の粒子からなる 2 準位系を考える．つまり，それぞれの粒子はエネルギー 0 または ϵ (> 0) のいずれかの状態をとる．ボルツマン定数は k_{B} とする。

問 1 この系の分配関数 Z を温度 T を用いて表せ。

問 2 1 粒子あたりのエネルギー期待値 $e(T)$ を求めよ。ただし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。

問 3 比熱 $c(T) = \frac{\partial e(T)}{\partial T}$ を求め，温度依存性を説明せよ。

次に，以下のような別の単純な統計力学モデルを考える。系は N 個の粒子からなり，全体として次の 2 種類のマクロ状態のいずれかをとる。

- 状態 A（基底状態）：エネルギー $E_0 = 0$, 縮退度 1
- 状態 B（励起状態）：エネルギー $E_1 = \Delta$, 縮退度 e^{Ns}（ただし $s > 0$ は定数）

なお，エネルギー差 Δ は N に比例する定数 $\Delta = N\epsilon$（$\epsilon > 0$）とする。

問 4 この系の分配関数 Z を温度 T を用いて表せ。

問 5 1 粒子あたりの自由エネルギー密度 $f(T) = -\frac{1}{\beta N}\log Z$ を求めよ。ただし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。

問 6 $f(T)$ の $N \to \infty$ の極限での値を求めよ。ただし，必要であれば温度 T によって場合分けを行ってよい。

問 7 相転移温度 T_{c} を求めよ。

問 8 $N \to \infty$ の極限での平均エネルギー密度 $e(T)$ およびエントロピー密度 $s(T)$ を求めよ。また，$e(T)$, $s(T)$ の温度依存性を定性的に説明せよ。

問 9 相転移は連続か一次かを答えよ。また，後者の場合には，潜熱を求めよ。

（計算用紙）