

## 埼玉大学大学院理工学研究科

### 博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 31 年 4 月入学試験問題

平成 30 年秋期入学試験問題

# 物 理 学 I

2018 年 9 月 6 日 13:00 ~ 14:30

#### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 3 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は 1 から 3 まで 3 問あるので、そのすべてを解答すること。
5. 問題 1・2・3 は、それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して、問題が小問に分かれている場合には、小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に、枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には、手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は、解答の有無にかかわらず、答案用紙 3 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

(50点)

図のように、大きさの無視できる3つのおもり1, 2, 3が質量の無視できる2つのバネでつながれた系を考える。おもり1, 2の質量を  $m$ , おもり3の質量を  $M$  とする。また、2つのバネの自然長を  $l$ , バネ定数を  $k$  とする。水平方向の1次元的な運動だけを考え、時刻  $t$  におけるおもり1, 2, 3の位置座標をそれぞれ  $x_1(t) - l$ ,  $x_2(t) + l$ ,  $x_3(t)$  とする。摩擦等の抵抗力は無視できるものとする。

問1  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  に対する運動方程式を求めよ。

問2 質量中心座標

$$X(t) = \frac{mx_1(t) + mx_2(t) + Mx_3(t)}{2m + M}$$

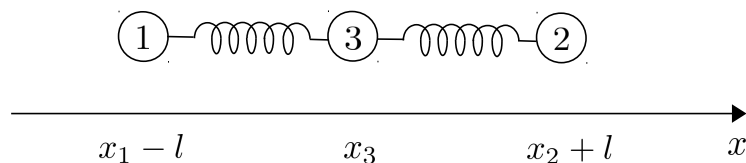
に対する運動方程式を求めよ。また、 $t = 0$  における初期条件  $X(0) = 0$ ,  $\dot{X}(0) = 0$  ( $\dot{X}$  は  $X$  の時間微分) を満たす解  $X(t)$  を求めよ。

以下では、 $X(t)$  は問2で求めた解で与えられているとする。

問3  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  だけを含む運動方程式を求めよ。

問4 固有角振動数を求めよ。

問5 それぞれの固有角振動数に対して、基準振動を表す解  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  を求めよ。



図

2

(50点)

金属導線中の自由電子について考える。金属導線中に自由電子（質量  $m$ ，電荷  $-e$ ）が密度  $n$  で一様に存在しているとし，導線の断面積を  $S$ ，その中を流れる自由電子の平均の速さを  $v$  とする。ただし必要な場合には，質量  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，電荷  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  を用いよ。

**問1** 自由電子密度  $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ 個/m}^3$ ， $S = 1.0 \text{ mm}^2$  の銅導線に  $I = 1.0 \text{ A}$  の電流が流れているとき，自由電子の平均速さ  $v$  を数値で求めよ。

**【仮定】** ここで金属導線中を流れる電流について，その導線内の自由電子は，導線内にある一様な電場  $E$  で加速され，その後，導線内の金属原子に衝突し，得たエネルギーをそこで失うことを繰り返す，その結果，全体としては平均的な速さ（ドリフト速度）で導線内を移動していると考えよ。

ここで自由電子が金属原子と衝突してエネルギーを失ってから，次の金属原子と衝突するまでの平均時間を  $T$  とし，それから定義できる緩和時間を  $\tau = T/2$  とする。

**問2** 導線内に一様な電場  $E$  があるとき，上記の平均時間  $T$  の間に自由電子が進む距離  $d$ ，自由電子の平均の速さ  $v$ ，電流  $I$  を  $e, m, E, T, n, S$  を用いて表せ。

次にこの金属導線の長さを  $L$  とし，その両端の電位差を  $V$  とする。

**問3** 一様な電場  $E$  の代わりに電位差  $V$  を用いて電流  $I$  の式を表し，抵抗  $R$  に相当する式を求めよ。

**問4** 銅導線の電気抵抗率を室温で  $1.7 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$  とするとき，緩和時間  $\tau$  を数値で求めよ。

**問5** **問1** で求めた銅導線中にある自由電子の平均の速さ  $v$  と **問4** で求めた緩和時間  $\tau$  から，自由電子の平均衝突距離  $d$  を数値で求めよ。

**問6** 銅原子のファンデルワールス半径が  $130 \text{ pm} = 1.3 \times 10^{-10} \text{ m}$  であることを参考にして，上で求めた平均衝突距離  $d$  の値の問題点をのべよ。またその原因を考察し，導線中のより正しい自由電子の運動について説明せよ。

3

(50点)

問1 気体の液化に利用されているジュール・トムソン効果を利用した冷却法(ジュール・トムソン膨張冷却)について以下の間に答えよ。ジュール・トムソン過程とは高圧(温度 $T_1$ , 圧力 $P_1$ )の気体を図に示したような綿などでできた細孔栓, あるいは膨張弁を通して低圧(圧力 $P_2$ )の容器へ押し出す断熱膨張過程のことを指す。この過程は不可逆過程であるが, 不可逆過程は接合部の細孔栓の部分のみで起こっており, 両方の容器内での変化は準静的に行われるものとして以下の間に答えよ。

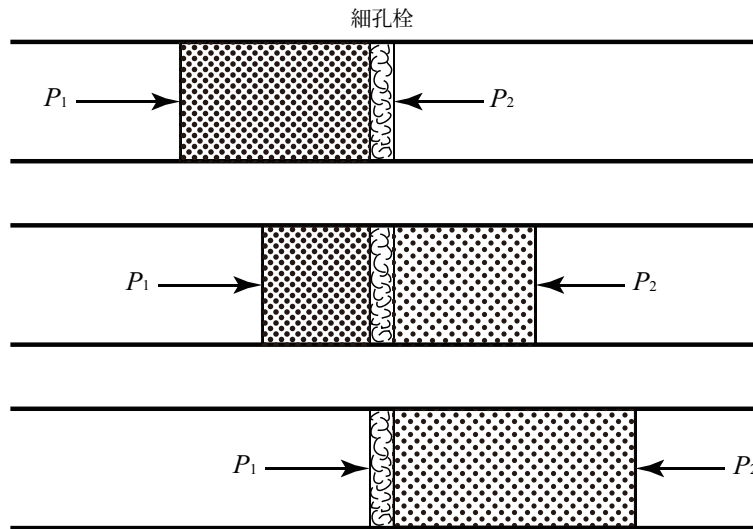


図. ジュール・トムソン過程.

- (1) 始状態と終状態でのエンタルピーが保存していることを簡単に説明せよ。
- (2) 始状態, 終状態の温度, 圧力をそれぞれ $T_1, P_1$ および $T_2, P_2$ とすれば, この過程で起こる温度変化は等エンタルピー過程にそって $T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H dP$ と表すことができる。 $\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$ はジュール・トムソン係数と呼ばれ,  $C_P$ を気体の定圧比熱として次式のように表すことができる。

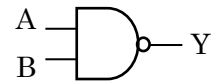
$$\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_P} \left\{ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right\} = \frac{V}{C_P} (\beta T - 1)$$

ここで熱膨張率を $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ とした。ジュール・トムソン係数の符号が反転する逆転温度や気体の温度, 熱膨張率などに留意して, この過程で冷却効果を得るために必要な条件を考察せよ。

- (3) 理想気体では $\beta = 1/T$ であるため, ジュール・トムソン効果による冷却効果は期待できない。前問で考察した条件は実在気体のどのような特徴を利用しているか説明せよ。

問2 以下の各問に答えよ。

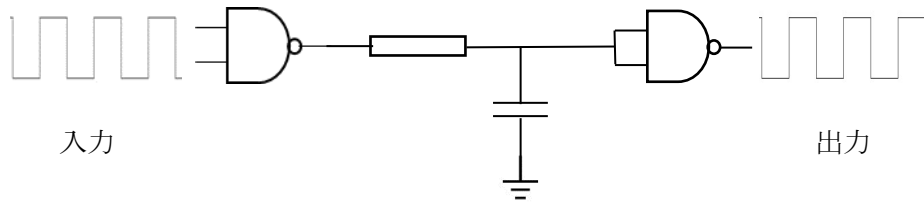
- (1) デジタル回路で用いる NAND ゲートについて、その入力端子を A,B, 出力端子を Y として、その論理表を答案用紙に記せ。



- (2) 複数個の NAND ゲートのみを用いて OR ゲートをつくりたい。その回路図を答案用紙に記せ。ただし、OR ゲートの論理表は入力・出力端子を A,B,Y としたとき、右表の通りである。

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- (3) 矩形パルスを遅延させる方法として、NAND ゲートを用いて以下の回路を組んだ。入力パルスと出力パルス間に遅れが生じる理由を説明せよ。

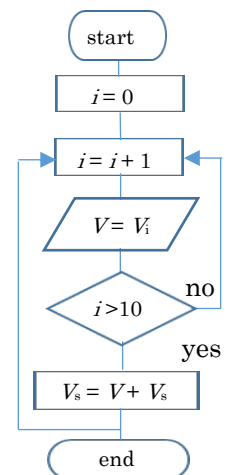
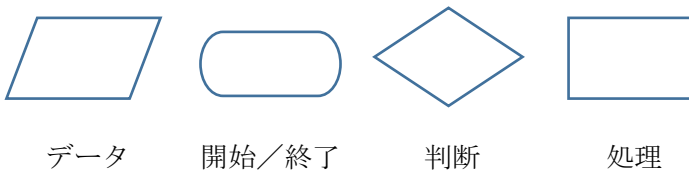


シンチレーション検出器を用いて、放射性物質から放出される荷電粒子を測定した。測定時間  $T$  の間に検出器では 10000 個 ( $i = 1 - 10000$ ) の出力信号電圧  $V_i$  が測定され、それらはデータファイルに記録されている。ただし、その出力信号電圧データには (a) 放射性物質からの荷電粒子による出力信号電圧に加え、(b) 背景自然放射線による出力信号電圧と (c) 検出器内で発生する電気雑音信号電圧が含まれている。ここで (b)(c) の信号電圧は一定電圧値  $V_{th}$  よりも小さく、(a) の信号は  $V_{th}$  より大きな信号電圧値で記録されているものとする。

- (4) シンチレーション検出器の放射線測定原理を、(放射線入射) → (光子生成) → (光子検出・増幅) → (信号出力) の流れに沿って説明せよ。

- (5) 記録されたデータファイルから、放射性物質による荷電粒子出力信号を選別し、その信号電圧値の標準偏差  $\sigma$  を求めるためのプログラムのフローチャートを記せ。必要な変数名や定数・記号などは各自で設定してよい。

(参考：フローチャート記号例 (下) と記載例 (右))



## 埼玉大学大学院理工学研究科

### 博士前期課程 物理機能系専攻 物理学コース

平成 31 年 4 月入学試験問題

平成 30 年秋期入学試験問題

# 物 理 学 II

2018 年 9 月 6 日 15:00 ~ 16:30

#### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 試験開始 60 分以内の退室は認めない。
3. この問題冊子と答案用紙 2 枚が配布される。すべての答案用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
4. 問題は 1 から 2 まで 2 問ある。すべて解答すること。
5. 問題 1・2 は、それぞれ別の答案用紙に解答すること。解答に際して、問題が小問に分かれている場合には、小問の番号や記号を明瞭に記すこと。
6. 問題冊子および答案用紙に、枚数の不足や印刷に不鮮明なところがある場合には、手を挙げて申し出ること。
7. 終了後は、解答の有無にかかわらず、答案用紙 2 枚の全てを提出すること。
8. 問題冊子は持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。



**1**

(75点)

質量  $m$  の粒子の 1 次元的な量子力学系を考える。運動量演算子を  $\hat{p}$  とすると、ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases} \quad (V_0 \text{ は正の定数})$$

である。プランク定数を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  とする。

まず、 $x < 0$  の領域の左側から、決まった波数  $k$  ( $k > 0$ ) をもつ波動関数

$$\psi_I(x, t) = e^{ikx - i\omega t} \quad (1)$$

によって表される粒子が入射した場合を考える。

**問 1** 波動関数 (1) が、 $x < 0$  の領域で運動量とエネルギーの固有値方程式を満たすことを示せ。また、それぞれの固有値である運動量  $p$  とエネルギー  $E$  を求めよ。

**問 2** シュレーディンガー方程式から、 $\omega$  は  $k$  の関数となる。この関数  $\omega(k)$  を求めよ。

入射エネルギーが  $0 < E < V_0$  のときのシュレーディンガー方程式の解は、

$$\psi(x, t) = \begin{cases} e^{ikx - i\omega(k)t} + A e^{-ikx - i\omega(k)t} & (x < 0) \\ B e^{-\kappa x - i\omega(k)t} + C e^{\kappa x - i\omega(k)t} & (x > 0) \end{cases} \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $A, B, C, \kappa$  ( $\kappa > 0$ ) は定数である。 $x < 0$  の第 1 項は入射波 (1) を、第 2 項は反射波を、 $x > 0$  の項は透過波を表している。

**問 3** 定数  $C, \kappa$  を求めよ。

**問 4** 定数  $A, B$  を求めよ。また、 $|A| = 1$  であることを示せ。

**問 5** シュレーディンガー方程式を満たす一般の波動関数  $\psi(x, t)$  に対して、確率密度  $\rho(x, t)$  と確率の流れ密度  $j(x, t)$  は、連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

を満たす。 $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  として、 $j(x, t)$  を  $\psi(x, t)$  を使って表せ。

問6 入射波, 反射波, 透過波それぞれの確率の流れ密度を  $j_I, j_R, j_T$  とすると, 反射率  $R$  と透過率  $T$  は, 比

$$R = -\frac{j_R}{j_I}, \quad T = \frac{j_T}{j_I}$$

によって定義される。問3, 問4の結果を使い, 波動関数(2)に対する  $R, T$  を求めよ。

次に, 入射波が(1)の重ね合わせで表される波束

$$\psi_I(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx - i\omega(k)t} \quad (3)$$

の場合を考える。ここで,  $f(k)$  は正の実数に値をもつ関数で,  $k = k_0$  ( $k_0 > 0$ ) にピークをもち, その近く以外では大きな値をもたないとする。また,  $k < 0$ , および,  $E > V_0$  のとき,  $f(k) = 0$  とする。

問7 入射波(3)に対する反射波  $\psi_R(x, t)$  を, (3)のような  $k$  についての積分の形で表せ。

(3)の  $\psi_I(x, t)$  や問7で求めた  $\psi_R(x, t)$  は, その絶対値がある  $x$  でピークをもつ関数になる。このピークの位置は次のように求めることができる。 $k$  積分の主な寄与は,  $f(k)$  がピークをもつ  $k = k_0$  付近からくる。ただし, 被積分関数の位相が  $k$  の関数として  $k = k_0$  付近で大きく変化する場合には, 積分の寄与が相殺して積分は大きな値にならない。したがって, 積分が大きな値をもちピークになるのは, 位相が  $k$  の関数として  $k = k_0$  で停留点になる場合である。

問8 時刻  $t$  における波束  $\psi_I(x, t)$  および  $\psi_R(x, t)$  のそれぞれのピークの位置を求めよ。計算の際には, 被積分関数に表れるすべての位相を考慮せよ。また, その結果を古典的な粒子の運動と比較せよ。

2

(75点)

質量  $m$  の粒子  $N$  個からなる単原子古典理想気体が、一様な重力場の中に立てられた無限に高い筒型の容器に入れられ、温度  $T$  の熱平衡状態にある。この系について、以下の問題に答えよ。なお、鉛直上向きを  $z$  軸の正の方向にとり、容器の底を  $z$  軸の原点とする。 $x, y$  軸は  $z$  軸に直交するようにとる。容器の断面積を  $\sigma$ 、重力加速度の大きさを  $g$ 、ボルツマン定数を  $k_B$ 、プランク定数を  $h$  とする。必要に応じて、以下の公式を用いよ。 $\log n! \simeq n \log n - n$  ( $n \gg 1$ ),  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  ( $a > 0$ )。ただし、 $\log$  は自然対数を表す。

問1 1個の原子に対する分配関数  $Z_{\text{single}}$  を求めよ。ただし、原子1個のハミルトニアンが

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz \quad (1)$$

と書けることを用いよ。 $p_x, p_y, p_z$  は原子の座標  $x, y, z$  に正準共役な運動量である。解答は、運動量  $p_x, p_y, p_z$  および座標  $x, y, z$  の積分の形で書け。

問2 問1の解答において積分を実行し、 $Z_{\text{single}}$  を計算せよ。

問3  $Z_{\text{single}}$  を用いて、 $N$  原子系の分配関数  $Z$  を書け。ただし、 $Z_{\text{single}}$  の具体的な形は代入しなくて良い。

問4  $N$  原子系の分配関数  $Z$  を実際に計算し、この系のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。ただし、 $N/\sigma$  を一定として  $N$  が大きな極限での漸近形を求めよ。

問5  $N$  原子系の平均エネルギーおよび熱容量を求めよ。ただし、前問と同様の極限を考えることで、平均エネルギーおよび熱容量を示量的な形で答えよ。